

21世纪全国高等院校实用规划教材

复变函数与积分变换



主编：焦红伟　尹景本

$z = re^{i\theta}$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高等院校实用规划教材

复变函数与积分变换

主　编　焦红伟　尹景本
副主编　吉洪威　张新成
张义宁



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书根据教育部高等院校复变函数与积分变换课程的基本要求，依据工科数学《复变函数与积分变换教学大纲》，结合本学科的发展趋势，在积累多年教学实践的基础上编写而成的。本书旨在培养学生的数学素质，提高其应用数学知识解决实际问题的能力，强调理论的应用性。本书体系严谨，逻辑性强，内容组织由浅入深，理论联系实际，讲授方式灵活。

本书共分 8 章，包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数及其应用、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换等。每章均配习题，书末附有习题答案。本教建议学时约 54(不含“*”内容)。

本书适合高等院校工科各专业，尤其是自动控制、通信、电子信息、测控、机械工程、材料成型等专业作为教材，也可供科技、工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/焦红伟，尹景本主编. —北京：北京大学出版社，2007.9

(21 世纪全国高等院校实用规划教材)

ISBN 978-7-301-12634-9

Ⅰ. 复… Ⅱ. ①焦…②尹… Ⅲ. ①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ. 0174.5 0177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 129230 号

书　　名：复变函数与积分变换

著作责任者：焦红伟　尹景本　主编

策 划 编 辑：孙哲伟

责 任 编 辑：李婷婷

标 准 书 号：ISBN 978-7-301-12634-9/O・0727

出　版　者：北京大学出版社

地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871

电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62750667　出版部 62754962

电 子 邮 箱：pup_6@163.com

印　刷　者：

发　行　者：北京大学出版社

经　销　者：新华书店

787 毫米×1092 毫米　16 开本　10.75 印张　246 千字

2007 年 9 月第 1 版　2007 年 9 月第 1 次印刷

定　　价：20.00 元

前　　言

培养基础扎实、勇于创新的人才，是大学教育的一个重要目标。在工科的教育体系中，数学课程是基础课程，在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力等方面起着重要的作用。复变函数理论一直伴随着科学技术的发展，从中汲取养分，并为之提供方法和工具。建立在复变函数理论之上的积分变换，通过特定形式的积分建立函数之间的对应关系。它既能简化计算，又具有明确的物理意义，在许多领域被广泛地应用，如电力工程、通信和控制领域、信号分析和图像处理、语音识别与合成、医学成像与诊断、地质勘探与地震预报等方面以及其他许多数学、物理和工程技术领域。通过本课程的学习，不仅能学到复变函数与积分变换中的基础理论及工程技术中的常用数学方法，同时还为学习有关的后续课程和进一步扩大数学知识面奠定了必要的数学基础。

本书以解析函数的理论为基础，阐述了复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数及其应用、共形映射，同时对傅里叶变换、拉普拉斯变换作了较为系统的介绍。本书深入浅出，突出基础概念和方法，在知识体系完整性的基础上，尽量做到数学推导简单易懂并在工程问题密切结合等方面形成了自己特色。书中精心编排了大量的例题和习题，以供读者进一步理解教材的内容。

在编写过程中我们力求突出以下几个特点：

(1) 注重复变函数与积分变换内容发生、发展的自然过程，强调概念的产生过程所蕴含的思想方法，注重概念、定理叙述的精确性。从而在学生获得知识的同时培养学生推理、归纳、演绎和创新能力。

(2) 对基本概念的引入尽可能联系实际，突出其物理意义；基础理论的推导深入浅出，循序渐进，适合工科专业的特点；基础方法的阐述富于启发性，使学生能举一反三、融会贯通，以期达到培养学生创新能力、提高学生的基本素质的目的。

(3) 例题和习题丰富，有利于学生掌握所学的内容，提高分析问题、解决问题的能力。为使复变函数理论完善，我们把共形映射作为一章编写进去，并用“*”加注，为学生展望新知识留下窗口，为进一步拓宽数学知识指出了方向。对于“*”章节，教师可根据专业需要、学生接受能力、课时的多少有选择地进行选讲，也可供学有余力的同学自学。

本书第 1 章、第 2 章由河南科技学院焦红伟编写；第 3 章由新乡机电工程学校吉洪威编写；第 4 章、第 5 章、第 6 章由河南科技学院尹景本编写；第 7 章由开封大学张新成编写；第 8 章由聊城大学张义宁编写。全书由焦红伟、尹景本负责统稿。本书的出版获得北京大学出版社的大力支持，河南科技学院教务处、数学系领导及全体教师给予了很多帮助和支持，陈付贵教授给予悉心指导，在此一并向他们表示衷心的感谢。

由于编者的水平有限，书中的缺点和疏漏在所难免，恳请专家、同行和广大读者批评指正。

编　　者

2007 年 6 月

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

教学提示：复变函数是变量为复数的函数.复变函数在众多数学分支中属于函数论.函数论研究的是空间形式上的特殊函数类的性质.复变函数研究的是定义在复数域上的解析函数的性质.下面先讨论复数与复变函数这一章,为研究解析函数作好准备.这门学科的一切讨论都是在复数范围内进行的.

教学目标：本章主要介绍复数及其运算和几何表示、复变函数及其极限和连续.通过本章的学习，使学生熟练掌握复数的各种表示方法及其运算，了解区域和复变函数的概念，掌握复变函数的极限和连续的概念.

1.1　复数及其运算

在初等代数中已经学过复数，为了便于以后讨论和理解，本节在过去的知识基础上，给出复数的两点式定义，在简要回顾过去相关结论的同时，加以必要的补充.

1.1.1　复数定义及运算

定义 1.1　设 x, y 为实数，称形如 (x, y) 的有序数对为**复数**，其中的“有序”是指：若 $x \neq y$ ，则 $(x, y) \neq (y, x)$. 为了方便起见，用 z 表示复数 (x, y) ，记作 $z = (x, y)$ ，特别地，将复数 $(0,0)$ 记作 $0 = (0,0)$.

复数 (x, y) 中的第一个实数 x 称为复数 z 的**实部**，第二个实数 y 称为复数 z 的**虚部**，分别记作

$$x = \mathrm{Re}(z), \qquad y = \mathrm{Im}(z)$$

对任意两个复数 $z_1 = (a,b), z_2 = (c,d)$ 规定：

(1)当且仅当 $a = b$ 且 $c = d$ 时，称 z_1 与 z_2 **相等**，记作 $z_1 = z_2$.

(2)**加法**　$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$.

减法　$z_1 - z_2 = (a,b) - (c,d) = (a-c, b-d)$.

乘法　$z_1 \cdot z_2 = (a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd, bc+ad)$.

除法　$z_1 \div z_2 = \dfrac{(a,b)}{(c,d)} = (\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}, \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}),\ z_2 \neq 0$.

由上述规定，可以验证：加法、乘法满足交换律与结合律，乘法对加法满足分配律. 由此可知，在实数域里由这些规律推得的恒等式在复数里仍然有效. 可以看到按上述规定加法与乘法运算所带来的好处. 另外，还可以验证：复数集关于四则运算是封闭的，其代数结构是域. 复数集用“**C**”表示，$\mathbf{C} = \left\{ z \middle| z = (a,b), a, b \in \mathbf{R} \right\}$，$\mathbf{R}$ 为实数域.

1.1.2　复数的代数式

在讨论复数的定义时，很容易提出问题：复数(x, y)与$x+y\mathrm{i}$（x, y为实数，$\mathrm{i}^2=-1$）有无联系？

事实上，由规定的运算法则，对形如$(a,0)$的复数作加法与乘法运算时，可以像计算实数一样进行，因此，可以将$(a,0)$与a等同起来．据此，可规定

$$a+(c,d)=(a,0)+(c,d)=(a+c,d)$$
$$a\cdot(c,d)=(a,0)\cdot(c,d)=(ac,ad)$$

于是，按此规定可推得

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x+y\cdot(0,1)$$

若记$\mathrm{i}=(0,1)$,则得

$$(x,y)=x+y\mathrm{i}\,,\qquad \mathrm{i}^2=-1$$

且易知$y\mathrm{i}=\mathrm{i}y$．

至此，可知，复数(x, y)就是以前学过的数$x+y\mathrm{i}$或$x+\mathrm{i}y$（x, y为实数，$\mathrm{i}^2=-1$）.

称$x+y\mathrm{i}$为**复数z的代数式**，其中i称为**虚数单位**，$\mathrm{i}^2=-1$．若$x\equiv 0, y\neq 0$时，称$y\mathrm{i}$为纯虚数.

关于复数$z_1=a+b\mathrm{i}$与$z_2=c+d\mathrm{i}$的四则运算，依定义 1.1 有：

$$z_1\pm z_2=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}$$
$$z_1z_2=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}$$
$$z_1\div z_2=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}, z_2\neq 0$$

为了方便起见，今后讨论问题时一般不再使用复数的数对表示，而常用复数的代数式或其他形式表示复数.

1.1.3　复数的模与共轭复数

对给定的复数$z=x+y\mathrm{i}$，称复数$x-y\mathrm{i}$为z的**共轭复数**，记作$\overline{z}=x-y\mathrm{i}$．称$\sqrt{x^2+y^2}$（算术根）为复数$z$的**模**，记作$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$．

关于复数的模与共轭复数，有下列关系.

(1) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，　$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq 0)$.

(2) $x\leqslant|x|\leqslant|z|$，　$y\leqslant|y|\leqslant|z|$.

(3) $z\cdot\overline{z}=x^2+y^2$.

(4) $x=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$，　$y=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$.

(5) $|z| = |\bar{z}|$,　$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $\overline{(\bar{z})} = z$.

(6) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,　$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$.

这些性质作为练习，由读者自己去证明.

【例 1.1】　设 $z_1 = 3 + 2\mathrm{i}, z_2 = 1 - \mathrm{i}$，求 $\frac{z_1}{z_2}$.

解　为求 $\frac{z_1}{z_2}$，在分子分母同乘 $\overline{z_2}$，再利用 $\mathrm{i}^2 = -1$，化简可得 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i}$.

【例 1.2】　求复数 $A = \frac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}$ 的模.

解法 1：用模的定义求 $|A|$，得 $|A| = 1$.

解法 2：利用 $A^2 = A \cdot \bar{A}$ 先求 $|A|^2$，再求出 $|A| = 1$.

解法 3：观察 A 发现分子与分母互为共轭复数，由性质 $|z| = |\bar{z}|$，得 $|A| = 1$.

1.2　复数的几何表示

1.2.1　复平面与复数的向量式

用建立了笛卡儿直角坐标系的平面来表示复数的平面称为**复平面**. 复平面赋予了复数以直观的几何意义，复数的数对表示式也可以看作是直角坐标系中的坐标(见图 1.1). 它建立了“数”与“点”之间的一一对应关系. 由此，今后不去区分“数”与“点”. 例如，把复数 $1 + 2\mathrm{i}$ 称为点 $1 + 2\mathrm{i}$，把点 $4 + \mathrm{i}$ 称为复数 $4 + \mathrm{i}$.

复数的几何解释使得许多关于复数的“量”有着清晰的“形”的表露. 例如，复数 $z = x + y\mathrm{i}$ 的模 $|z|$ 表示复平面上点 $M(x, y)$ 到原点的距离 r (见图 1.2)等. 这种“形”的表露对研究复变函数有重要意义.

在复平面上，由于点 $M(x, y)$ 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 是一一对应的，所以，复数 $z = x + y\mathrm{i}$ 可看成一个起点在原点，终点在点 $M(x, y)$ 的向量(向径)(见图 1.2). 复数的向量形式是复数在复平面上的又一几何解释.

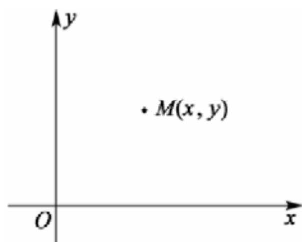


图 1.1

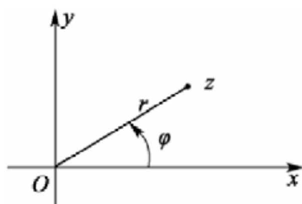


图 1.2

1.2.2　复数的三角式与指数形式

1. 复数 $z \neq 0$ 的辐角

复数 z 的辐角记作 $\operatorname{Arg} z$，它是向量 $\overrightarrow{Oz}$ 与 x 轴正向之间的夹角，其方向规定为逆时针方向为正，顺时针方向为负.

显然，对复数 $z=0$ 无辐角可言，而对每一个复数 $z \neq 0$，其辐角有无穷多个值，若 φ_0 是复数 z 的一个辐角，则

$$\operatorname{Arg} z = \varphi_0 + 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$$

就是复数 z 的全部辐角.

若用 $\arg z$ 表示满足条件 $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ 的一个特定值，则称 $\arg z$ 为复数 z 的**主辐角**或辐角的**主值**.

显然，有

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$$

辐角的主值 $\arg z\ (z \neq 0)$ 可以由反正切 $\operatorname{Arc}\tan\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按下列关系确定.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当} x>0,\ y\begin{cases} >0, & z\text{在第Ⅰ象限} \\ =0, & z\text{在}x\text{轴正向} \\ <0, & z\text{在第Ⅳ象限} \end{cases} \\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & \text{当} x=0,\ y\begin{cases} >0, & z\text{在}y\text{轴正向} \\ <0, & z\text{在}y\text{轴负向} \end{cases} \\ \arctan\dfrac{y}{x}\pm\pi, & \text{当} x>0,\ y\begin{cases} >0, & z\text{在第Ⅱ象限} \\ <0, & z\text{在第Ⅲ象限} \end{cases} \\ \pi & \text{当} x<0,\ y=0,\ z\text{在}x\text{轴正向} \end{cases}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$.

2. 复数的三角式

利用直角坐标与极坐标的关系式，很容易得到 $z = x + y\mathrm{i}$ 的三角表示式，称为复数 z 的**三角式**

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),\quad z \neq 0$$

φ 通常取 $\arg z$.

3. 复数的指数式

若引入记号

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\ (\mathrm{e}\text{ 为自然对数的底})$$

则由复数的三角式得到

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

称该式为复数 $z(z \neq 0)$ 的**指数式**，其中 r 是 z 的模，θ 是 z 的辐角．利用复数的指数式作乘除法较简单，结果可得到两个等式：

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2$$

按以下约定来理解这两个等式：

第一个等式的意思是由于辐角的多值性，这个等式是两个无限集合意义下的相等.即当在左端取定一个值 α 时，那么在右端分别可从 $\mathrm{Arg}z_1$ 中取出一个值 α_1 及从 $\mathrm{Arg}z_2$ 中取出一个值 α_2，使得 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，并且，当从右端分别从 $\mathrm{Arg}z_1$ 与 $\mathrm{Arg}z_2$ 中取出 α_1 与 α_2 时，那么在左端定可取出某个 α，使得 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$．

第二个等式的理解与此类似．不仅如此，今后，凡遇到含多值的等式时，都按此约定理解．

复数的各种表示法可以相互转换，以适应讨论不同问题时的需要．

【例 1.3】　设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，求 z^2．

解　$z^2 = z \cdot z = r^2(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^2 = r^2(\cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta) = r^2\mathrm{e}^{2\theta\mathrm{i}}$

一般地，设 n 是正整数，z^n 表示 n 个 z 的乘积，称为 **z 的 n 次幂**．对 z 的 n 次幂有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) = r^n\mathrm{e}^{n\theta\mathrm{i}}$$

特别，当 $r = 1$ 即 $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 时，有

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

这就是**棣莫弗公式**.

【例 1.4】　设 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，试求复数 $z = \dfrac{1 - \mathrm{i}\tan x}{1 + \mathrm{i}\tan x}$ 的三角式.

解　由所给复数 z 化简得

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1 - \mathrm{i}\tan x)(1 - \mathrm{i}\tan x)}{(1 + \mathrm{i}\tan x)(1 - \mathrm{i}\tan x)} \\ &= \frac{(1 - \tan^2 x) - 2\mathrm{i}\tan x}{1 + \tan^2 x} \\ &= \cos 2x - \mathrm{i}\sin 2x \end{aligned}$$

于是，得到复数 z 的三角式为

$$z = \cos(-2x) + \mathrm{i}\sin(-2x)$$

【例 1.5】　将复数 $z = -2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ 化为指数式.

解　因 $r = 4, \arg z = \arctan\sqrt{3} - \pi = \dfrac{\pi}{3} - \pi = -\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $z = 4\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ 即为所求.

1.2.3　复数的 n 次方根

设 z 为复数，n 为正整数，若存在复数 w 满足方程

$$w^n = z$$

则称 w 为 z 的一个 n **次方根**，称求 z 的全部 n 次方根为把复数 z **开** n **次方**，或称为求 z 的 n **次根**，记作 $w=\sqrt[n]{z}$ 或 $w=z^{\frac{1}{n}}$.

对于符号 $\sqrt[n]{z}$ 约定：当 z 为非负实数时，符号 $\sqrt[n]{z}$ 仅表示通常的算术根．如果此时问题是需要将复数 z 开 n 次方，那将会特别声明．

求复数 $z=re^{i\theta}\neq 0$ 的 n 次根的公式为

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad,\quad k=0,1,2,\cdots,n-1 .$$

当 k 取其他整数值时，这些根又重复出现，例如当 $k=n$ 时有

$$w_n = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)=w_0$$

在几何上 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

【例 1.6】 解方程 $z^3-1=0$.

解 求方程 $z^3-1=0$ 的解就是求 $z=1$ 的全部三次方根. 因 $\arg 1=0$ ，$\sqrt[3]{1}=1$ ，故 z=1 的全部三次方根为

$$w_0 = e^{i0}=1$$

$$w_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

这三个根是内接于中心为原点，半径为 1 的圆的正三角形的三个顶点.

【例 1.7】 设 $z=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)$ ，求 $\sqrt[4]{z}$.

解 因 $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

故 $r=1,\arg z=\frac{\pi}{4}$. 于是，z 的四个四次方根为

$$w_0=\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}$$

$$w_1=\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}$$

$$w_2=\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}$$

$$w_3=\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}$$

1.2.4　无穷远点与复球面

由于某种需要，引入一个特殊的复数——**无穷大**，记作∞.

关于∞，没有定义其实部、虚部与辐角，但规定其模$|\infty| = +\infty$.

有关∞参与的运算规定如下：

设a是异于∞的一个复数，规定

$$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{a} = \infty$$

设b是异于 0 的一个复数，规定

$$b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty, \quad \frac{b}{0} = \infty$$

关于$\infty \pm \infty$，$0 \cdot \infty$，$\frac{\infty}{\infty}$及$\frac{0}{0}$，仍无定义.

∞的几何解释：由于在复平面上没有一点能与∞相对应，所以，只得假想在复平面上添加一个“假想点”(或“理想点”)使它与∞对应，称此“假想点”为无穷远点.

关于无穷远点，约定：在复平面添加假想点后所成的平面上，每一条直线都通过无穷远点，同时，任一半平面都不包含无穷远点.

为与复平面区别，称复平面添加无穷远点后所成平面为**扩充复平面**. 扩充复平面又称**闭平面**，复平面又称**开平面**. 有时与扩充复平面相对而言也把复平面称为**有限复平面**.

这里要特别注意的是，这里的记号∞是一个数，而在高等数学中所见的记号$+\infty$或$-\infty$均不是数，它们只是表示变量的一种变化状态.

为使无穷远点有更加令人信服的直观解释，人们引入了**黎曼球面**(或复球面)：

将一个球心为O'，半径为$\frac{1}{2}$的球按照以下方法放在直角坐标系$Oxyz$ (见图 1.3)中(设复平面与Oxy坐标平面重合)：使球的一条直径与Oz轴重合，并且使球与Oxy平面相切于原点O. 球面上的点O称为南极，点N称为北极.

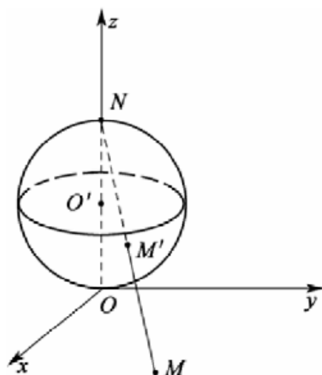


图 1.3

对于复平面内任一点M，如果用一直线把点M与北极点N连接起来，那么该直线一定与球面相交与异于北极的一点M'，反过来，对于球面上任何一个异于N的点M'，用直线把N与M'连接起来，这条直线的延长线就与复平面相交于一点.

若规定点N为点∞在黎曼球面上的对应点，而点∞是点N在扩充复平面上的对应点，则扩充复平面与黎曼球面之间便建立了一一对应关系.

至此，关于复数的几何解释又可以这样来说：复数域的几何模型是复平面或挖掉点 N 的黎曼球面，复数域添加无穷大后所成集合的几何模型是扩充复平面或黎曼球面.

1.3 平 面 点 集

本节主要是对一些常见的点与点集作出规定．若无特殊声明，则总在复平面上讨论．

1.3.1 邻域

若$z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$, $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$，则点$z_1$与$z_2$间的距离$d(z_1,z_2)$规定为

$$d(z_1,z_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

显然，$d(z_1,z_2) = |z_2 - z_1|$.

设z_0为一定点，$\rho > 0$，称满足$|z - z_0| < \rho$的点z的全体为点z_0的ρ**邻域**，记作$U(z_0,\rho)$ · $U(z_0,\rho)$简称为点z_0的邻域.

$U(z_0,\rho)$的几何意义是，以 z_0为圆心，以ρ为半径的圆内的全体点所组成的集合.

称$U^\circ(z_0,\rho) = U(z_0,\rho) - \{z_0\} = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \rho\}$为$z_0$的去心$\rho$邻域，简称为点$z_0$的**去心邻域**.

$U^\circ(z_0,\rho)$的几何意义是，以z_0为圆心，以ρ为半径的圆内的全体点挖掉z_0后所组成的集合.

下面利用邻域来刻画一些特殊的点与点集.

设E是一点集，z_0是一定点：

若z_0的任意一个邻域内都含有E的无穷多个点，则称z_0为E的**聚点**.

若$z_0 \in E$且存在某个$U(z_0,\rho)$，使得$U(z_0,\rho)$内除 z_0外再无E的点，则称 z_0为E的**孤立点**.

若$z_0 \in E$且存在某个$U(z_0,\rho)$，使得$U(z_0,\rho) \subset E$，则称点z_0为E的**内点**.

若存在某个$U(z_0,\rho)$，使得$U(z_0,\rho)$内的全部点都不属于E，则称 z_0为E的**外点**.

若z_0的任意一个邻域内既有属于E的点，又有不属于E的点，则称z_0为E的**边界点**.

称由E的全部边界点组成的集合为E的**边界**，记作∂E.

若E的点都是E的内点，则称E为**开集**.

若E的全部聚点都属于E，则称E为**闭集**.

若存在一个正数M，使得E内的任意一点z都满足$|z|<M$，则称E为**有界集**，否则，称E为**无界集**.

【例 1.8】　设点集$E=\{z\,\|z|<1\}$，则点$z=1/2$是E的内点；$z=\mathrm{i}$是E的聚点和边界点；$z=1+\mathrm{i}$是E的外点；E是开集且为有界集；$\partial E=\{z\,\|z|=1\}$，∂E是闭集且为有界集；$E\cup\partial E=\{z\,\|z|\leqslant 1\}$是闭集且为有界集．这里的$E$即$U(0,1)$，常称为**单位圆**.

1.3.2　曲线

定义 1.2　设$x(t)$与$y(t)$是定义在区间$[\alpha,\beta]$上的实值连续函数，称由

$$z(t)=x(t)+y(t)\mathrm{i}$$

确定的点集C为复平面上的**连续曲线**，$z(\alpha)$与$z(\beta)$分别称为曲线C的**起点**与**终点**．若$z(\alpha)=z(\beta)$，则称曲线C为**闭曲线**.

曲线C的方向规定为参数t增加的方向．曲线C的反向曲线记为C^-.

若连续曲线C仅当$t_1=t_2$时，$z(t_1)=z(t_2)$，则称C为**简单曲线**或**约当曲线**．当$t_1\neq t_2$而有$z(t_1)=z(t_2)$时，点$z(t_1)=z(t_2)$称为曲线C的**重点**．没有重点的连续曲线即为简单曲线或约当曲线.

若连续曲线C是一闭曲线，且仅当t_1,t_2中一个是α，另一个是β时，才有$z(t_1)=z(t_2)$，则称C是**简单闭曲线**或**约当闭曲线**(即简单曲线起点与终点重合).

若C是简单曲线，$x'(t)$与$y'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，且对$t\in[\alpha,\beta]$，有

$$z'(t)=x'(t)+y'(t)\mathrm{i}\neq 0\ (\text{或者记为}\ [x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0)$$

则称C为**光滑曲线**，称由有限条光滑曲线首尾连接而成的曲线为**逐段光滑曲线**.

为方便起见，称逐段光滑的闭曲线为围线．关于围线的方向规定为：逆时针方向为正向，顺时针方向为负向.

1.3.3　区域

设E为点集，若对E中任意两点，总能用一条完全属于E的连续曲线将它们连接起来，则称E是**连通的**.

设E为点集，若它是开集，且是连通的，则称E为**区域**.

若点集D为区域，则称D连同其边界∂D所成的集合为**闭区域**，记作$\overline{D}$.

任意一条简单闭曲线C必将复平面唯一地分成D_1、C、D_2三个点集(见图 1.4)，使它们满足：

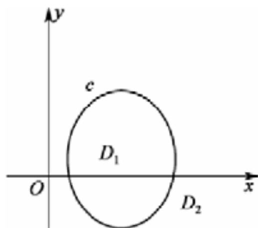


图 1.4

(1)彼此不相交;

(2)D_1是一个有界区域(称为曲线C的**内部**);

(3)D_2是一个无界区域(称为曲线C的**外部**);

(4)C既是D_1的边界又是D_2的边界;

(5)若简单折线(指满足简单曲线定义的折线)Γ的一个端点属于D_1,另一个端点属于D_2,则Γ必与C相交.

设D为区域,若D中任意一条简单闭曲线的内部仍属于D,则称D为**单连通区域**,不是单连通区域的区域称为**复连通区域**.

【例 1.9】 设$E=\{z|\operatorname{Im} z>0\}$,$D=\{z|1<|z|<2\}$,由定义得知,$E$是单连通区域,$D$是复连通区域.

单连通区域的特征是在该区域内任一个简单闭曲线可经过连续变形而缩成一个点.而复连通区域不具有这个特征.

1.3.4 无穷远点的邻域

设$\rho>0$,称满足$|z|>\rho$的点z的全体所成的集合为无穷远点的ρ邻域,记作$U(\infty,\ \rho)$.

$U(\infty,\ \rho)$的几何意义:表示曲线$|z|=\rho$的外部.

有时为了方便起见,也简称$U(\infty,\ \rho)$为**无穷远点的邻域**.

在扩充复平面上,若一个区域内的每一条简单闭曲线的内部或外部(包含无穷远点)都属于这个区域,则称该区域为**单连通区域**.称不是单连通区域的区域为**复连通区域**.

【例 1.10】 在扩充复平面上,$E=\{z||z|<1\}$为单连通区域;$D=\{z||z|>1\}$是单连通区域;$D=\{z|1<|z|<\infty\}$是复连通区域.

1.4 复变函数

复变函数研究的主要对象是定义在复数域上的解析函数,而解析函数是一种特殊的复变函数,因此,在讨论了复数集后,还需要讨论复变函数的有关概念,进而为研究解析函数作好准备.

1.4.1 复变函数的概念

定义 1.3 设G与E为复平面上的两个复数集,若存在对应关系f,使对每一个$z\in G$,都有确定的$w\in E$与之对应,则称在G上确定一**函数**,记作

$$w=f(z),\ z\in G$$

习惯上称复变数w是复变数z的函数,简称复变函数.

若依f只有一个确定的w与z对应,则称$w=f(z)$为**单值函数**.否则,称$w=f(z)$为**多值函数**.

例如,$w=z^2, w=|z|$为单值函数,$w=\sqrt[3]{z}, w=\operatorname{Arg}z$为多值函数.

今后，若无特殊声明，则讨论的函数均为单值函数．

同高等数学一样，在上述定义中，称集合 G 为函数的**定义域**，称 G 的生成集

$$G' = f(G) = \{w | w = f(z), z \in G\}$$

为函数的**值域**，z 与 w 分别称为函数的**自变量**与**因变量**．

函数 $w = f(z)$ 又称为**变换**或**映射**．变换或映射着重刻画点与点之间的对应关系，而函数则着重刻画数与数之间的对应关系．

设有函数 $w = f(z)$，$z \in G$，G 为区域，若对 $z_1, z_2 \in G$，当 $z_1 \neq z_2$ 时，有 $f(z_1) \neq f(z_2)$，则称 $w = f(z)$ 为 G 上的**单叶函数**，称 G 为 $w = f(z)$ 的**单叶性区域**．

例如，$w = z + 1$ 是复平面上的单叶函数，复平面是该函数的单叶性区域．

设有函数 $w = f(z)$，$z \in G$．若对值域 $G' = f(G)$ 中的每一个 w，都有确定的 $z \in G$ 与之对应，且使 $w = f(z)$，则称在 G' 上确定一函数，记作 $z = f^{-1}(w), w \in G'$，称为函数 $w = f(z)$ 的**反函数**．

显然，反函数也有单值函数与多值函数之分．

例如，$w = z + 1$ 的反函数 $z = w - 1$ 是单值函数，而 $w = z^3$ 的反函数 $z = \sqrt[3]{w}$ 是多值函数．

本书中，如无特殊说明，所讨论的函数均为单值函数．

设有函数 $w = f(z)$，$z \in G$，若存在 $M > 0$，使对任意的 $z \in G$ 都有 $|f(z)| < M$，则称函数 $w = f(z)$ 为 G 上的**有界函数**；否则，称为**无界函数**．

复变函数与实变量的实值函数有无联系呢？为弄清这个问题，来观察一个例子．设 $w = z + z^2$，$z \in$ 复平面．令

$$z = x + y\mathrm{i}, \qquad w = u + v\mathrm{i}$$

则有 $$u + v\mathrm{i} = (x + y\mathrm{i}) + (x + y\mathrm{i})^2 = (x^2 - y^2 + x) + (2xy + y)\mathrm{i}$$

于是有 $$u = x^2 - y^2 + x, \qquad v = 2xy + y$$

由此可知，函数 $w = z + z^2$ 的实部与虚部均为二元实值函数．

一般而言，对于 $w = f(z)$，$z \in G$，若令 $z = x + y\mathrm{i}$，$w = u + v\mathrm{i}$，则由对应关系 f 与复数相等的定义，易知 u 与 v 均是二元实值函数．

若设 $z = x + y\mathrm{i}$，$w = u + v\mathrm{i}$，则有

$$w = f(z) = u(x, y) + v(x, y)\mathrm{i}$$

因此，研究复变函数可以转化为研究二元实值函数．

一般来讲，当 z 与 w 用不同的复数表示法时，刻画函数 $w = f(z)$ 的两个二元实值函数会发生相应的变化．

至此，可以说，复变函数与实变量的实值函数有联系．这种联系表现为：**复变函数的实部与虚部均可用二元实值函数来表示．**

由于复变函数 $w = f(z)$ 的几何图形需在四维空间里考虑的缘故，所以，不可能有实值函数 $y = f(x)$ 与 $z = f(x, y)$ 的那种直观的感觉．为了赋予复变函数以形的解释，从变换或映射的角度来考虑．

设有函数 $w = f(z)$，$z \in G$，值域 $G' = f(G)$．取两张复平面，分别称为 z 平面和 w 平

面，若将定义域放在 z 平面上，值域 G' 放在 w 平面上，则复变函数 $w=f(z)$ 的几何意义是，将 z 平面上的集合 G 变换(映射)为 w 平面上的集合 G'．通常，称 G 为**原象集**，称 G' 为**象集**．若 $w_0\in G'$ 是由点 $z_0\in G$ 变换(映射)来的，则称 w_0 为 z_0 的**象点**，z_0 为 w_0 的**原象点**．

【例 1.11】　设 $w=f(z)=z+h, h=1+\mathrm{i}, G=\{z\,\|z|=1\}$ 为单位圆周，试求 $G'=f(G)$．

解　为了求 G'，其想法(思路)中最容易想到的是，设法求出 G' 中点所遵循的规律，然后，由此规律再去分析 G' 是怎样的集合．为此，令

$$z=x+y\mathrm{i}, \qquad w=u+v\mathrm{i}$$

代入 $w=f(z)=z+h$ 中得

$$u=x+1$$
$$v=y+1$$

由此得

$$(u-1)^2+(v-1)^2=|z|^2$$

而由 G 知 $|z|=1$，故有

$$(u-1)^2+(v-1)^2=1$$

即 G' 为 w 平面上的以点 1＋i 为圆心，以 1 为半径的圆周，亦即

$$G'=\{w\,\|w-(1+\mathrm{i})|=1\}$$

【例 1.12】　设 $w=f(z)=z^2$，试问它把 z 平面上的下列曲线分别映射成 w 平面上的什么曲线：

(1) $G=\left\{z\,\|z|=2, 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\right\}$；　　(2) $G=\left\{z\mid(\mathrm{Re}\,z)^2-(\mathrm{Im}\,z)^2=4\right\}$；

(3) $G=\left\{z\mid\mathrm{Re}\,z=\dfrac{1}{2}\right\}$．

解　依照例 1.11 的思路来处理这个问题．

(1)设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，　$w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，代入 $w=f(z)=z^2$ 得

$$\rho=r^2$$
$$\varphi=2\theta$$

而由 G 知道 $r=2$，　$0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$，故有 $\rho=4, 0<\varphi<\pi$，即

$$G'=\{w\,\|w|=4, 0<\arg z<\pi\}$$

(2)设 $z=x+y\mathrm{i}$，　$w=u+v\mathrm{i}$，代入 $w=f(z)=z^2$ 得

$$u=x^2-y^2$$
$$v=2xy$$

而由 G 知道 $x^2-y^2=4$，故有 $u=4$，即

$$G'=\{w\mid \mathrm{Re}\,w=4\}$$

(3)设 $z=x+y\mathrm{i},\quad w=u+v\mathrm{i}$，代入 $w=f(z)=z^2$ 得

$$u=x^2-y^2$$
$$v=2xy$$

而由 G 知道，$x=1/2$，故有

$$G'=\left\{w\mid (\mathrm{Im}\,z)^2+\mathrm{Re}\,w=\frac{1}{4}\right\}$$

即 G' 为 w 平面上的以 $w=1/4$ 为顶点，开口向左的抛物线.

1.4.2　复变函数的极限

与在高等数学中一样，极限的概念在复变函数中也扮演着十分重要的角色.

同高等数学一样，先引进数列的极限，然后再讨论函数的极限.

定义 1.4　设有复数列 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$，记作 $\{z_n\}$，若存在复数 z_0，对任意的 $\varepsilon>0$，总存在自然数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$|z_n-z_0|<\varepsilon$$

则称数列 $\{z_n\}$ 存在极限(或**收敛**)，其极限为 z_0 (或收敛于 z_0)，记作

$$\lim_{n\to\infty} z_n=z_0 \text{ 或 } z_n\to z_0(n\to\infty)$$

若复数列 $\{z_n\}$ 不存在极限，则称数列 $\{z_n\}$ **发散**.

复数列 $\{z_n\}$ 的极限为 z_0 的几何意义是明显的：它表示对于点 z_0 的任意邻域 $U(z_0,\varepsilon)$，数列 $\{z_n\}$ 中总存在一项 z_N，使在此项后面的所有项 $z_{n+1},z_{n+2},\cdots$，都位于该邻域内.

定理 1.1　若 $z_0=x_0+y_0\mathrm{i},\quad z_n=x_n+y_n\mathrm{i},\quad n=1,2,\cdots$，则 $\{z_n\}$ 以 z_0 为极限的充分必要条件是 $x_n\to x_0$ 且 $y_n\to y_0(n\to\infty)$.

该定理的重要意义在于它揭示了复数数列与实数数列在收敛问题上的紧密联系.

设有复数列 $\{z_n\}$，若存在正数 M，使得对任意都有 z_n 都有 $|z_n|<M$，则称数列 $\{z_n\}$ 为**有界数列**. 否则，称数列 $\{z_n\}$ 为**无界数列**.

复数列的极限是实数列极限的推广，这种推广使它们有类似的运算法则和性质定理，证明方法也相仿，如对复数列的极限具有的下述有关定理结论只叙而不证.

若复数列 $\{z_n\}$ 收敛，则 $\{z_n\}$ 是有界数列.

若复数列 $\{z_n\}$ 收敛，则 $\{z_n\}$ 的极限是唯一的.

(柯西收敛准则)复数列 $\{z_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$，总存在自然数 N，使当 $n,m>N$ 时，有 $|z_n-z_m|<\varepsilon$.

(四则运算法则)若 $z_n\to A, z'_n\to B(n\to\infty)$，则：

(1) $(z_n\pm z'_n)\to A\pm B(n\to\infty)$；

(2) $(z_n\cdot z'_n)\to A\cdot B(n\to\infty)$；

(3) $\frac{z_n}{z'_n} \to \frac{A}{B}(n \to \infty), B \neq 0$.

下面讨论函数的极限.

定义 1.5　设函数 $w = f(z)$，$z \in G$，z_0 为 G 的聚点，若存在复数 A，对任意的 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使当 G 中的点 $z \in N^{\circ}(z_0, \delta) = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$ 时，有

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

则称 $f(z)$ 当 z 在 G 中趋于 z_0 时有极限 A，记作

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ (z \in G)}} f(z) = A \text{ 或 } f(z) \to A \ (z \to z_0, z \in G)$$

关于 $f(z) \to A(z \to z_0, z \in G)$ 的几何意义可理解为：对于 w 平面上定点 A 的任意邻域 $U(A, \varepsilon)$，在 z 平面上一定能找到 z_0 的某个去心邻域 $U^{\circ}(z_0, \delta)$，使得当点 z 进入 $U^{\circ}(z_0, \delta)$ 时，其象点 w 就落入 $U(A, \varepsilon)$ 内.

由定义 1.5 可见，复变函数的极限概念与高等数学中的极限概念极为相似. 但这仅仅是问题的一个方面，问题的另一个方面是它们之间尚有本质上的差别：

在复变函数的极限概念中，$z \to z_0$ 时关于路径的要求比 $x \to x_0$ 时关于路径的要求要苛刻的多，前者 $z \to z_0$ 要求 z 在 G 上沿任意路径趋于 z_0 是有无穷条路径可供选择，而后者 $x \to x_0$ 要求 x 在实轴上沿任意路径趋于 x_0，实则只有两条路径(x_0 的左侧与右侧)可供选择.

由复变函数的极限定义，可仿照高等数学中的方法获得下述结论：

若 $f(z)$ 当 z 在 G 中趋于 z_0 时存在极限，则极限是唯一的.

若 $f(z)$ 当 z 在 G 中趋于 z_0 时存在极限，则存在 $U^{\circ}(z_0, \delta)$ 及正数 M，使得当 $z_0 \in U^{\circ}(z_0, \delta)$ 时，有 $|f(z)| < M$.

若函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 均定义在 G 上，且 $f(z) \to A, g(z) \to B(z \to z_0)$，则有：

(1) $[f(z) \pm g(z)] \to A \pm B(z \to z_0)$；

(2) $[f(z) \cdot g(z)] \to A \cdot B(z \to z_0)$；

(3) $\frac{f(z)}{g(z)} \to \frac{A}{B}(z \to z_0), B \neq 0$.

定理 1.2　若 $f(z) = u(x, y) + v(x, y)\mathrm{i}, z \in G, z_0 = x_0 + y_0\mathrm{i}$ 是 G 的聚点，则 $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ (z \in G)}} f(z) = A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = \operatorname{Re} A \text{ 且 } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = \operatorname{Im} A$$

证　设 $z = x + y\mathrm{i} \in G$，$A = u_0 + v_0\mathrm{i}$

若 $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ (z \in G)}} f(z) = A$，当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 即 $0 < |(x + y\mathrm{i}) - (x_0 + y_0\mathrm{i})| < \delta$ 时有

$$|(u + \mathrm{i}v) - (u_0 + \mathrm{i}v_0)| < \varepsilon$$

由于

$$\left|(u+\mathrm{i}v)-(u_0+\mathrm{i}v_0)\right|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$\left|u-u_0\right|\leqslant\left|(u+\mathrm{i}v)-(u_0+\mathrm{i}v_0)\right|$$

$$\left|v-v_0\right|\leqslant\left|(u+\mathrm{i}v)-(u_0+\mathrm{i}v_0)\right|$$

所以，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有

$$\left|u-u_0\right|<\varepsilon\text{，}\quad\left|v-v_0\right|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=\operatorname{Re}A\text{，}\quad\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=\operatorname{Im}A$$

反之，如果上面两式成立，则当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有

$$\left|u-u_0\right|<\frac{\varepsilon}{2}\text{，}\quad\left|v-v_0\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

而

$$\left|f(z)-A\right|=\left|(u-u_0)+\mathrm{i}(v-v_0)\right|\leqslant\left|u-u_0\right|+\left|v-v_0\right|$$

所以，当 $0<\left|z-z_0\right|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in G)}}f(z)=A$$

该定理的重要意义在于：它揭示了复变函数的极限与实变函数极限的紧密关系，将求复变函数的极限问题转化为求两个二元实值函数的极限问题.

【例 1.13】　设 $f(z)=\operatorname{Re}z, z$ 属于复平面，对复平面上任意的点 z_0，令 $\Delta z=\Delta x+\Delta y\mathrm{i}$，试证 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 不存在.

证　为了证明 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 不存在，只须选取两条路径，使 Δz 在其上趋于 0 时所得的极限值不同即可. 因 $\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\dfrac{\operatorname{Re}(z_0+\Delta z)-\operatorname{Re}z_0}{\Delta z}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}$

所以，当 Δz 在过 z_0 的平行虚轴的直线上趋于 0(即 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$)时，有

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\to 0$$

而当 Δz 在过 z_0 的平行实轴的直线上趋于 0 (即 $\Delta x\to 0,\Delta y=0$)时，有

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\to 1$$

故 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 不存在.

【例 1.14】 设 $f(z)=z^2, z\in$ 复平面，对复平面上任意的点 z_0，试证

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=2z_0$$

证 因

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{(z_0+\Delta z)^2-{z_0}^2}{\Delta z}=2z_0+\Delta z$$

所以，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=2z_0$$

为便于在扩充复平面上考虑极限，引入下面的定义.

定义 1.6 设有函数 $f(z), z\in G$，∞ 为 G 的聚点，若存在复数 A，对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\rho>0$，使得当 $z\in G$ 且 $|z|>\rho$ 时，有

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

则称 $f(z)$ 当 z 在 G 中趋于 ∞ 时有极限 A，记作

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\(z\in G)}}f(z)=A \text{ 或 } f(z)\to A(z\to\infty, z\in G)$$

1.4.3 复变函数的连续性

定义 1.7 设 $w=f(z),\quad z\in G, z_0$ 为 G 的聚点且 $z_0\in G$，若

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in G)}}f(z)=f(z_0)$$

则称 $f(z)$ 在点 z_0 **连续**. 若 $f(z)$ 在 G 中每一点都连续，则称 $f(z)$ 在 G 连续.

与高等数学中的一元连续函数一样，由连续的定义可类似地获得以下结论：

若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 均在点 z_0 连续，则 $f(z)\pm g(z), f(z)\cdot g(z)$ 和 $\dfrac{f(z)}{g(z)}(g(z)\neq 0)$ 在点 z_0 连续.

函数 $f(z)=u(x,y)+v(x,y)\mathrm{i}$ 在点 $z_0=x_0+y_0\mathrm{i}$ 连续的充分必要条件是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 同时在点 (x_0,y_0) 连续.

若函数 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则

(1) $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上为有界函数；

(2) $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上能取到最大值与最小值，即有 $z_1, z_2\in\overline{D}$，使得对任意的 $z\in\overline{D}$，有

$$|f(z_1)|\leqslant|f(z)|\leqslant|f(z_2)|$$

(3) $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上一致连续，即对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $|z_1-z_2|<\delta$ ($z_1, z_2\in\overline{D}$)时，有

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$$

由上述结论可以推得多项式函数在复平面内是连续的，有理函数当分母不为零时在复平面内也都是连续的.

1.5　习　　题

1．求下列复数的实部与虚部、共轭复数、模与辐角：

(1) $\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；

(2) $\frac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$；

(3) $\mathrm{i}^8+4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$；

(4) $\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^5$.

2．将下列复数化为三角式与指数式：

(1) $3\mathrm{i}$；

(2) -3；

(3) $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$；

(4) $\frac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$.

3．求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5$；

(2) $\sqrt[6]{-1}$；

(3) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$；

(4) $(-1+\mathrm{i})^{10}$.

4．求方程 $z^6+a^6=0$(a 是正实数)的根.

5．一个复数乘以 $-\mathrm{i}$，它的模与辐角有何改变？

6．若复数 $a+b\mathrm{i}$ 是实系数方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

的根，则 $a-b\mathrm{i}$ 也是该方程的根.

7．一个复数乘以 i，它的模与辐角有何改变？

8．已知两点 z_1 与 z_2，问下列各点位于何处？

(1) $z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2$；

(2) $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$.

9．若 $|\alpha|=1$ 或 $|\beta|=1$，求证 $\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}=1\right|$.

10．试求下列各式中的 x 与 y（x，y 都是实数）.

(1) $(1+2\mathrm{i})x+(3-5\mathrm{i})y=1-3\mathrm{i}$；

(2) $(x+y)^2\mathrm{i}-\frac{6}{\mathrm{i}}-x=-y+5(x+y)\mathrm{i}-1$；

(3) $x+\mathrm{i}y=\sqrt{a+\mathrm{i}b}$.

11．将下列方程（t 为实参数）给出的曲线用一个实直角坐标系方程给出.

(1) $z=t(1+\mathrm{i})$；

(2) $z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$；

(3) $z=t+\frac{\mathrm{i}}{t}$；

(4) $z=t^2+\frac{\mathrm{i}}{t^2}$.

12．指出下列各题中 z 的轨迹或所在的范围，并作图.

(1) $\mathrm{Re}(z+2)=-1$；

(2) $|z+2\mathrm{i}|\geqslant 1$；

(3) $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$；

(4) $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=3$；

(5) $\arg(z-\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}$；

(6) $|z+3|+|z+1|=4$；

(7) $0<\arg z<\pi$；

(8) $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geqslant 1$.

13．描出下列不等式所确定的区域，并说明其区域的开闭性、有界性、连通性.

(1) $0<\mathrm{Re}\,z<1$；

(2) $|z-1|>4$；

(3) $-\frac{\pi}{4}<\arg\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}<\frac{\pi}{4}$；

(4) $1<|z-3\mathrm{i}|<2$；

(5) $|z-1|<4|z+1|$；

(6) $1<\arg z<1+\pi$；

(7) $|z-2|-|z+2|>1$；

(8) $\dfrac{1}{2}\leqslant\left|z-\dfrac{1}{2}\right|\leqslant\dfrac{3}{2}$；

(9) $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|\leqslant 1\ (|a|<1)$；

(10) $z\bar{z}+(6+\mathrm{i})z+(6-\mathrm{i})\bar{z}\leqslant 4$.

14．试求：(1) $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$；

(2) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z\operatorname{Re} z}{z}$；

(3) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z\operatorname{Re} z}{1+z}$.

15．求下列函数的定义域，并判断这些函数在定义域内是否为连续函数.

(1) $w=|z|$；

(2) $w=\dfrac{z^2+1}{(z+2)^2+1}$.

16．设 (1) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$；

(2) $f(z)=\dfrac{z}{|z|}\ (z\neq 0)$；

(3) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$.

试证：当 $z\to 0$ 时，$f(z)$ 的极限不存在.

17．试证函数 $f(z)=\bar{z}$ 在 Z 平面上处处连续.

18．试证 $\arg z(-\pi<\arg z\leqslant\pi)$ 在负实轴上(包括原点)不连续，除此而外在 Z 平面上处处连续.

19．设函数 $f(z)$ 在点 z_0 处连续，且 $f(z_0)\neq 0$，证明存在 z_0 的邻域使 $f(z)\neq 0$.

20．如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 处连续，证明 $\overline{f(z)}$，$|f(z)|$ 在 z_0 处连续.

第2章　解析函数

教学提示：解析函数是复变函数研究的主要对象，它是一类具有某种特性的可微函数．这一章，首先引入判断函数可微和解析的条件——柯西-黎曼条件；其次，将在实数域上熟知的初等函数推广到复数域上来，并研究其性质．

教学目标：本章主要介绍复变函数的导数与解析函数的概念和性质．通过本章的学习使学生了解复变函数的导数及复变函数解析的概念，掌握复变函数解析的充要条件，掌握判别函数解析性的方法；了解解析函数与调和函数的关系，并掌握由已知的调和函数构造解析函数的方法；记住自变量为复数的初等函数的定义以及它们的一些主要性质．

2.1　复变函数的导数

2.1.1　复变函数的导数

观察例 1.14 可以发现：对给定的函数 $f(z)=z^2, z$ 属于复平面而言，极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

对于该函数的定义域中的每一点都存在．而对函数 $f(z)=\mathrm{Re}\,z, z$ 属于**复平面而言**，情况却不是这样(见例 1.13)．因此，自然会想，可否将使这种特殊类型的极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在的函数 $w=f(z)$ 从复变函数中挑选出来研究呢？如果这么做，那么，不久将会看到，从复变函数中挑选出来的这类函数就是本课程研究的主要对象——解析函数．

为方便起见，把函数 $w=f(z)$ 在其定义域中一点 z_0 处极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在的情形先作个介绍，然后，再讨论这种类型的极限对函数定义域中每一点都存在的情况．

定义 2.1　设函数 $w=f(z)$ 定义在区域 D 内，$z_0\in D,(z_0+\Delta z)\in D$，若

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在，则称此极限为函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的**导数**，记作 $f'(z_0)$，即

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \tag{2.1}$$

此时，称函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 **可导**，否则，称函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 **不可导**.

由定义可知，导数 $f'(z_0)$ 是一种极限，因此，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

的存在，要求 $\Delta z\to 0$ 时的路径是任意的. 这点要特别注意. 由此就不难理解，即使 Δz 在从点 z_0 发出的各条射线上趋于 0 时，$\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 都趋于同一个数，也不足以说明函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 可导，因为射线只是一种特殊的路径.

不仅如此，导数 $f'(z_0)$ 还是一种特殊类型(差商)的极限，这与高等数学中 $f'(x_0)$ 的定义是一样的. 由于 $f'(z_0)$ 是一种极限，所以，将极限的有关理论应用于 $f'(z_0)$ 上便可获得关于 $f'(z_0)$ 的一些相应结果，如导函数的概念、导数的四则运算法则、反函数与复合函数的求导法则及求导公式等.

同高等数学一样，也可用 $f'(z)\big|_{z=z_0}$ 来记式(2.1)的左端，用 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 或 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ 或 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 来记式(2.1)的右端.

关于“可导”与“连续”的关系也与高等数学一样. **若函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 可导，则 $w=f(z)$ 在点 z_0 连续. 反之，则未必.**

【例 2.1】　试证函数 $f(z)=z^n$ (n 为自然数)在复平面上处处可导，且 $f'(z)=nz^{n-1}$.

证　用定义来证明.

对于复平面上的任意一点 z，由导数定义有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}\\&=\lim_{\Delta z\to 0}\left[nz^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}\cdot\Delta z+\cdots+(\Delta z)^{n-1}\right]\\&=nz^{n-1}\end{aligned}$$

于是，$f(z)=z^n$ 在点 z 的导数存在且等于 nz^{n-1}. 由点 z 在复平面上的任意性，证得 $f(z)=z^n$ 在复平面上处处可导.

【例 2.2】　设 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 定义在复平面上，试证 $f(z)$ 在复平面上仅在原点可导.

证　用定义来证明.

若 $z=0$，则因

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}\\&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\cdot\operatorname{Re}(\Delta z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\operatorname{Re}(\Delta z)=0\end{aligned}$$

所以，$f(z)$ 在点 $z=0$ 可导.

若 $z\neq 0$，则有

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)\mathrm{Re}(z+\Delta z)-z\,\mathrm{Re}\,z}{\Delta z}$$

$$=\frac{\mathrm{Re}(z+\Delta z)-\mathrm{Re}\,z}{\Delta z}z+\mathrm{Re}(z+\Delta z)$$

令 $\Delta z=\Delta x+\Delta y\mathrm{i}$，于是有

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=z\frac{\Delta x}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}+x+\Delta y$$

由于上式当 Δz 在过点 z 平行于虚轴的直线上趋于 0 (即 $\Delta x=0,\quad \Delta y\to 0$)时，其极限为 x，而当 Δz 在过点 z 平行于实轴的直线上趋于 0 (即 $\Delta x\to 0,\quad \Delta y=0$)时，其极限为 $z+x$，所以，当 $z\neq 0$ 时，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

不存在，故 $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$ 在点 $z\neq 0$ 处不可导.

综上所述，函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$ 于复平面上仅在点 $z=0$ 处可导.

类似地，可证得函数 $f(z)=\overline{z}$ 在复平面上处处不可导.

2.1.2　复变函数的微分

同导数一样，复变函数的微分概念在形式上与高等数学中微分概念也完全相同.

事实上，若函数 $w=f(z)$ 在点 z 可导，则有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z)$$

于是有

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z)+\eta,\quad \eta\to 0(\Delta z\to 0)$$

由此得

$$\Delta w=f'(z)\Delta z+\eta\Delta z,\quad \eta\to 0(\Delta z\to 0)$$

与高等数学一样，称 $f'(z)\Delta z$ 为函数 $w=f(z)$在点 z 的**微分**，记作

$$\mathrm{d}w=f'(z)\Delta z \text{ 或 } \mathrm{d}f=f'(z)\Delta z$$

若 $w=f(z)=z$，则 $\mathrm{d}z=1\cdot\Delta z$，于是，函数 $w=f(z)$在点 z 的微分又可写成

$$\mathrm{d}w=f'(z)\mathrm{d}z \quad\text{或}\quad \mathrm{d}f=f'(z)\mathrm{d}z$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=f'(z)$$

至此，获得关于导函数的另一解释：导函数等于函数的微分与自变量的微分之比．此解释与高等数学中关于“$f'(x)$”的解释一样．

2.2　解析函数

2.2.1　解析函数概念

观察例 2.1 与例 2.2 会发现，在复变函数中，有一类函数具有如下特征：函数$f(z)$不仅在点a可导，而且在点a的某个邻域$U(a,R)$内处处可导．由此可以将具有此特征的函数从复变函数中的可导函数类中分离出来研究．

定义 2.2　设函数$w=f(z)$定义在区域D内，z_0为D内某一点，若存在一个邻域$U(z_0,\rho)$，使得函数$f(z)$在该邻域内处处可导，则称函数$f(z)$在点z_0**解析**．此时称点z_0为函数的**解析点**．若函数$f(z)$在点z_0**不解析**，则称z_0为函数$f(z)$的**奇点**．

若函数$f(z)$在区域D内每一点都解析，则称函数$f(z)$在区域D内解析．此时，也称函数$f(z)$在区域D内是解析的，$f(z)$为区域D内的**解析函数**，区域D又称为函数$f(z)$的**解析区域**或**解析域**．

解析与可导的关系：函数在一点解析与函数在该点可导不是一回事，函数在一个区域内解析与该函数在这个区域内处处可导则等价．

由例 2.1 知，函数 $f(z)=z^n$ 在复平面解析；由例 2.2 知，函数$f(z)=z\operatorname{Re}z$在点$z=0$不解析，即点$z=0$为函数$f(z)=z\operatorname{Re}z$的奇点．

由于“解析”是用“可导”定义的，而“可导”是一种特殊类型的极限，所以，与高等数学一样，可得到解析函数的四则运算法则、复合函数求导法则及反函数求导法则．

2.2.2　柯西-黎曼条件(C.-R.条件)

已知函数$f(z)=z^2,g(z)=z+1$在复平面是解析的，若令$z=x+y\mathrm{i}$，$f(z)=u+v\mathrm{i}$，$g(z)=u_1+v_1\mathrm{i}$．经过计算$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$，发现这两个函数均有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\\&\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{\partial v_1}{\partial y},\frac{\partial u_1}{\partial y}=-\frac{\partial v_1}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.2}$$

由此自然会问：式(2.2)的成立对于解析函数来说是否是一种必然规律呢？

定理 2.1 对上述问题作了肯定的回答．

为方便起见，对于二元实值函数$g(x,y)$，引入下列记号：

$$g_x=\frac{\partial g}{\partial x},g_y=\frac{\partial g}{\partial y},g_{xx}=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2},g_{yy}=\frac{\partial^2 g}{\partial y^2},g_{xy}=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}$$

定理 2.1　若函数 $f(z)=u(x,y)+v(x,y)\mathrm{i}$ 定义在区域 D 内，则函数 $f(z)$ 在区域 D 内为解析函数的充分必要条件是：

(1) $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内可微；

(2) $u_x=v_y, u_y=-v_x$ 在 D 内成立.

证　必要性

设点 z 为 D 内任意一点，令

$$\Delta z=\Delta x+\Delta y\mathrm{i},\quad \Delta f=\Delta u+\Delta v\mathrm{i},\quad f'(z)=a+b\mathrm{i}$$

因 $f(z)$ 在 D 内解析，所以，对于点 z 定存在 $f'(z)$，故有

$$\begin{aligned}\Delta u+\Delta v\mathrm{i}&=f'(z)\Delta z+\varepsilon\Delta z\\&=(a+b\mathrm{i})(\Delta x+\Delta y\mathrm{i})+\varepsilon\Delta z\\&=(a\Delta x-b\Delta y)+\mathrm{i}(b\Delta x+a\Delta y)+\varepsilon\Delta z,\varepsilon\to 0(\Delta z\to 0)\end{aligned}$$

从而有

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\mathrm{Re}(\varepsilon\Delta z),\quad \Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\mathrm{Im}(\varepsilon\Delta z)$$

而 $\mathrm{Re}(\varepsilon\Delta z)$ 与 $\mathrm{Im}(\varepsilon\Delta z)$ 均是 $|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小(令 $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2\mathrm{i}$，$\dfrac{|\mathrm{Re}(\varepsilon\Delta z)|}{|\Delta z|}=\left|\dfrac{\varepsilon_1\Delta x-\varepsilon_2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\leqslant\left|\dfrac{\varepsilon_1\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|+\left|\dfrac{\varepsilon_2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|$)，故由 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微的定义知道，$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，再由 $z=x+y\mathrm{i}$ 在 D 内的任意性，便得到条件(1).

另外，由于函数 $f(z)$ 在 D 内解析，所以，对 D 内任意一点 z，有

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

一定存在，于是，当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时，得 $f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x$

当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时，得 $f'(z)=v_y-\mathrm{i}u_y$

比较两式得 $u_x=v_y,u_y=-v_x$，即获得条件(2).

由点 z 在 D 内的任意性得到必要性的证明.

充分性

设点 z 为 D 内任意一点，由条件(1)得

$$\Delta u=u_x\Delta x+u_y\Delta y+\varepsilon_1,\quad \Delta v=v_x\Delta x+v_y\Delta y+\varepsilon_2$$

其中，

$$\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to 0\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0\right), j=1,2$$

记 $u_x=a,v_x=b$，由条件(2)得

$$\begin{aligned}\Delta f &= \Delta u + \mathrm{i}\Delta v \\ &= (a\Delta x - b\Delta y) + \mathrm{i}(b\Delta x + a\Delta y) + (\varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_2) \\ &= (a + \mathrm{i}b)(\Delta x + \mathrm{i}\Delta y) + \varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_2\end{aligned}$$

于是 $$\frac{\Delta f}{\Delta z} = a + \mathrm{i}b + \frac{\varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_2}{\Delta z}$$

因为 $$\frac{\varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_2}{\Delta z} \to 0(\Delta z \to 0)$$

所以 $$\frac{\Delta f}{\Delta z} \to a + \mathrm{i}b$$

即函数 $f(z)$ 在点 z 可导．由点 z 在 D 内的任意性得知函数 $f(z)$ 在 D 内是解析函数，这便得充分性．

综上所述，定理获证．

条件(2)常称为柯西-黎曼条件(C.-R.条件)．

从定理 2.1，可以有下面几点收获：

①定理 2.1 给出了解析函数的充分必要条件．

②解析函数的实部与虚部受到十分苛刻的限制，这些限制深刻地揭示了解析函数在"结构"上的特征．

③提供了识别解析函数的一种方法．

④提供了一种利用 u_x, u_y, v_x, v_y 计算 $f'(z)$ 的方法：若 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在点 $z = x + \mathrm{i}y$ 可导，则

$$\begin{aligned}f'(z) &= u_x + \mathrm{i}v_x \\ &= u_x - \mathrm{i}u_y \\ &= v_y + \mathrm{i}v_x \\ &= v_y - \mathrm{i}u_y\end{aligned} \tag{2.3}$$

在承认第 4 章有关结论的前提下，定理 2.1 可以表述成：

定理 2.2　若函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 定义在区域 D 内，则 $f(z)$ 在 D 内为解析函数的充分必要条件是：

(1) u_x, u_y, v_x, v_y 在 D 内连续．

(1) $u_x = v_y, u_y = -v_x$ 在 D 内成立．

【例 2.3】　试证函数 $f(z) = z^3 + z^2 + 1$ 在复平面解析．

证　方法 1　令 $f(z) = u + \mathrm{i}v$，$z = x + \mathrm{i}y$ 得

$$u = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 + 1$$

$$v = 3x^2 y - y^3 + 2xy$$

利用定理 2.2 即可证得 $f(z)$ 在复平面解析．

方法 2　利用解析函数的运算法则即可证得 $f(z)$ 在复平面解析．

【例 2.4】　设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，试证(1)与(2)等价．

(1) $f(z)$ 在 D 内为常数；

(2)函数 $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析.

证 (1)$\Rightarrow$(2)

因 $f(z)$ 为常数，所以，$\overline{f(z)}$ 在 D 内也为常数，于是，$\overline{f(z)}$ 在 D 内解析，即推得(2).

(2)$\Rightarrow$(1)

令

$$f(z)=u+\mathrm{i}v$$

则

$$\overline{f(z)}=u-\mathrm{i}v$$

因 $f(z)$ 在 D 内解析，所以，有 $u_x=v_y, u_y=-v_x$

又因 $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析，所以，有 $u_x=-v_y, u_y=v_x$

由上两式得

$$u_x=v_y=u_y=v_x=0$$

从而得 u 与 v 均为常数，于是可知 $\overline{f(z)}$ 也为常数，即推得(1).

综上所述，(1)与(2)是等价的.

当 $f(z)$ 在 D 内解析时，下列命题是等价的：

① $f(z)$ 为常数；② $f'(z)=0$；③ $|f(z)|$ 为常数；④ $\overline{f(z)}$ 为常数；⑤ $\mathrm{Re}\,f(z)$ 为常数；⑥ $\mathrm{Im}\,f(z)$ 为常数.

这些留做习题，大家试证一下.

2.2.3 调和函数

观察例 2.4 及其他解析函数的实部 u 与虚部 v 后发现：u 与 v 均满足拉普拉斯方程

$$g_{xx}+g_{yy}=0$$

这是一种偶然的现象，还是一种必然的规律呢？

定义 2.3 设二元实函数 $g(x,y)$ 定义在区域 D 内，若 $g(x,y)$ 在 D 内具有连续的二阶偏导数，且满足拉普拉斯方程

$$g_{xx}+g_{yy}=0$$

则称 $g(x,y)$ 为 D 内的**调和函数**.

在承认第 4 章的结论(区域 D 内的解析函数具有各阶导数)的前提下，有

定理 2.3 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$，若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 u 与 v 均为 D 内的调和函数.

定义 2.4 若在区域 D 内，u 与 v 均为调和函数，且满足 C.-R.条件：

$$u_x=v_y, u_y=-v_x,$$

则称 v **为** u **的共轭调和函数**.

由此可知，若函数 $f(z)$ 在区域 D 内为解析函数，则 $\mathrm{Im}\,f(z)$ 为 $\mathrm{Re}\,f(z)$ 的共轭调和函数. 反过来，设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$，若在区域 D 内 v 为 u 的共轭调和函数，则函数 $f(z)$ 在 D 内为解析函数.

注意：①当 v 为 u 的共轭调和函数时，$f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析的；② $u+\mathrm{i}v$ 一般不解析，如 $u=y, v=x, u+v\mathrm{i}=\mathrm{i}\bar{z}$ 不解析，但 u 是 v 的共轭调和函数．即这里的共轭概念不具有对称性．

定理 2.4　设 $u(x,y)$ 在区域 D 内为调和函数，则存在由公式

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y+C \tag{2.4}$$

确定的函数 $v(x,y)$，使得函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析．其中，点 (x,y) 为 D 内的动点，点 (x_0,y_0) 为 D 内一定点，C 为常数．(证明略)

由共轭调和函数与解析函数的关系，也可以根据给定的二元实函数来构造解析函数．

【例 2.5】　已知 $u(x,y)=x^2-y^2+xy$，试求解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$．

解　方法 1　因为 $u(x,y)=x^2-y^2+xy$ 在复平面上为一调和函数，所以，由式(2.3)得

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} -u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y+C$$
$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)} (2y-x)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y+C$$

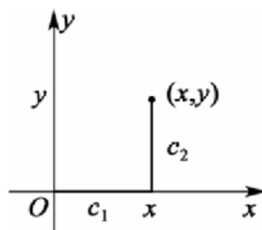


图 2.1

取积分路径如下(见图 2.1)：先沿实轴从原点到点 $(x,0)$，后从点 $(x,0)$ 沿平行于虚轴的直线到点 (x,y)．于是有

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,0)} (2y-x)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y+\int_{(x,0)}^{(x,y)} (2y-x)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y+C \quad (C\text{ 为任意常数})$$
$$=\int_0^x -x\mathrm{d}x+\int_0^y (2x+y)\mathrm{d}y+C=-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+2xy+C$$

从而得

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$
$$=(x^2-y^2+xy)+\mathrm{i}\left(2xy-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)+\mathrm{i}C$$
$$=(x^2-y^2+\mathrm{i}2xy)-\frac{\mathrm{i}}{2}(x^2+\mathrm{i}2xy-y^2)+\mathrm{i}C$$
$$=(x+\mathrm{i}y)^2-\frac{\mathrm{i}}{2}(x+\mathrm{i}y)^2+\mathrm{i}C$$
$$=\frac{2-\mathrm{i}}{2}z^2+\mathrm{i}C$$

经验证，$f(z)$ 即为所求．

方法 2(**偏积分法**)　依 C.-R.条件有：$2y-x=-u_y=v_x$

于是

$$v=\int(2y-x)\mathrm{d}x$$
$$=2xy-\frac{x^2}{2}+g(y)$$

由此得

$$\begin{aligned} v_y &= 2x + g'(y) \\ &= u_x \\ &= 2x + y \end{aligned}$$

从而有　$g(y) = \dfrac{y^2}{2} + C$

所以　$v = 2xy - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + C$　　（C 为任意常数）

故得　$f(z) = \dfrac{2-\mathrm{i}}{2} z^2 + \mathrm{i}C$

经验证，所得 $f(z)$ 即为所求.

方法 3 (**不定积分法**)由于要求 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 为解析函数，所以，有

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + \mathrm{i}v_x \\ &= u_x - \mathrm{i}u_y \\ &= (2-\mathrm{i})z \end{aligned}$$

另外，又因

$$h(z) = \frac{2-\mathrm{i}}{2} z^2$$

满足

$$\left[f(z) - h(z)\right]' = 0$$

所以，由本章习题可得

$$f(z) - h(z) \equiv C \ (C \text{ 为任意常数})$$

从而得

$$f(z) = \frac{2-\mathrm{i}}{2} z^2 + \mathrm{i}C \ (C \text{ 为任意常数})$$

经验证，所得 $f(z)$ 即为所求.

2.3　初 等 函 数

2.3.1　幂函数与根式函数

从学习高等数学所获得的知识，容易想到，将实变量的初等函数推广到复数域，然后再研究这些推广后的复变量的函数的性质.

先讨论幂函数与根式函数.

定义 2.5　设 $z = x + \mathrm{i}y$，n 为正整数，称

$$w = z^n$$

为**幂函数**.

由解析函数的运算法则可推得幂函数在复平面是解析函数，其导数可由导数定义推出：

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

这个结果与在高等数学中的$(x^n)' = nx^{n-1}$一样.

定义 2.6　设$z = re^{i\theta}(\neq 0)$，称满足

$$w^n = z\,(n\text{为不小于 2 的正整数})$$

的w为z的n**次根式函数**，或简称**根式函数**，记作

$$w = \sqrt[n]{z}$$

(1)根式函数为多值函数，它不是解析函数.

事实上，由第 1 章复数的n次方根知，对于每一个确定的$z = re^{i\theta}(\neq 0)$，都有n个不同的w与之对应，即有

$$\begin{aligned} &w_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}} \\ &w_1 = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}} \\ &\cdots \\ &w_{n-1} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

因为根式函数是多值函数，所以，它不是解析函数.

(2)根式函数在从原点起沿负实轴剪开的复平面上可分出n个单值函数.

对于确定的z，因$\mathrm{Arg}z$是多值的，所以，式(2.5)中的每个函数$w_k\ (k = 0,1,\cdots,n-1)$均非单值函数. 即每个$w_k$为多值函数的原因是$\mathrm{Arg}z$为多值函数，亦即对于确定的$z$，其辐角有无穷多个.

因此，为使w_k成为单值函数，只须设法使得对于确定的z，其辐角只能取一个值即可. 为此，先来看一下使$\mathrm{Arg}z$为多值的原因. 对于确定的z_0，若设$\arg z_0 = \theta_0$，则$\mathrm{Arg}z_0$可取θ_0，$\theta_0 \pm 2\pi$，$\theta_0 \pm 4\pi$，$\cdots$这些值，而能取θ_0以外的那些值即取$\theta_0 \pm 2\pi$，$\theta_0 \pm 4\pi$，$\cdots$这些值的原因是，在复平面上存在一条从z_0出发绕$z = 0$连续变动一周后又能回到z_0的简单闭曲线. 因此，为使$\arg z_0$取不到$\theta_0 \pm 2\pi$，$\theta_0 \pm 4\pi$，$\cdots$这些值，只须将复平面从原点$z = 0$起沿负实轴剪开即可.

至此，根式函数$w = \sqrt[n]{z}$在从原点$z = 0$沿负实轴剪开的复平面上可分出n个单值函数(见式(2.5)). 称其中的每一个函数为根式函数的一个**单值支**，或简称一个**支**. 特别地，称其中的w_0为**主值支**，或**主支**，称w_k为第k支.

用来剪开复平面，从而使多值函数能分出单值支的割线(或割痕)称为该多值函数的**支割线**.

由此可知，复平面上从原点起始的负实轴便是函数$w = \sqrt[n]{z}$的支割线. 同时，由支割线所起的作用可知，在扩充复平面上，任意一条从原点起始伸向无穷远点的射线都是的支割线. 不仅如此，更一般地是：在扩充复平面上，任意一条从原点起始并伸向无穷远点的曲线都是$w = \sqrt[n]{z}$的支割线.

由此可见，对 $w=\sqrt[n]{z}$ 而言，其支割线不是唯一的，而且支割线的形状可以是多种多样的．为确定起见，通常只选从原点起始的负实轴为函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 的支割线．

为便于计算 $w=\sqrt[n]{z}$ 的单值支在支割线上的值，约定：支割线分成了上岸与下岸，将位于上岸的点的辐角视为 π，将位于下岸的点的辐角视为 $-\pi$．

例如，对于根式函数的主值支 $w_0=\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$，若将点 $z=1$ 视为上岸的点时，则 w_0 在点 $z=1$ 的值为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}$，若将点 $z=1$ 视为下岸的点时，则 w_0 在点 $z=1$ 的值为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{n}}$．

一般地，对位于支割线上岸的点 $z=x$，w_0 在该点的值为 $\sqrt[n]{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}$，对位于支割线下岸的点 $z=x$，w_0 在该点的值为 $\sqrt[n]{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{n}}$．由此可知，当点 z 从负实轴上方趋于点 $z=x$ 时的极限与当 z 从负实轴下方趋于点 $z=x$ 时的极限是不同的．因此，w_0 在支割线上是不连续的．

仿此有：函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 的每一个单值支在支割线上都是不连续的．但是，它们在沿支割线剪开的复平面上都是连续的．

(3)根式函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 的每个单值支在从原点起始沿负实轴剪开的复平面上为解析函数．

2.3.2　指数函数与对数函数

定义 2.7　设 $z=x+\mathrm{i}y$，称

$$\exp(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y) \tag{2.6}$$

为**指数函数**，其等式右端中的 e 为自然对数的底，即 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$．

为方便起见，约定：在无特殊声明时，e^z 即表示 $\exp(z)$．

指数函数的性质：

(1)(加法定理)对任意两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，有 $\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$

(2) e^z 在复平面上为解析函数，且有 $(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z$

(3)对任意复数 $z=x+\mathrm{i}y$，有

$$|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x\quad,\quad \mathrm{Arg}z=y+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$$

(4) e^z 只以 $2k\pi\mathrm{i}$ ($k\in\mathbf{Z}$)为周期．

关于周期，约定：设函数 $f(z)$ 定义在点集 E 上，若存在复常数 r，使得对任意的 $z\in E$，均有 $(z+r)\in E$，且满足

$$f(z+r)=f(z)$$

则称 $f(z)$ 为 E 上的**周期函数**，称 r 为函数 $f(z)$ 的**周期**．

e^z 只以 $2k\pi\mathrm{i}$ ($k\in\mathbf{Z}$)为周期．事实上，若设 $l=\alpha+\beta\mathrm{i}$ 为 e^z 的周期，则有 $\mathrm{e}^{z+l}=\mathrm{e}^z$

即
$$\mathrm{e}^z(\mathrm{e}^l-1)=0$$

亦即
$$\mathrm{e}^l=\mathrm{e}^\alpha(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)=1$$

从而

$$\mathrm{e}^\alpha\cos\beta=1,\qquad \mathrm{e}^\alpha\sin\beta=0$$

由第二式得 $\sin\beta=0$，这只能是 $\beta=n\pi$ ($n\in\mathbf{Z}$)．将 $\beta=n\pi$ 代入第一式得 $(-1)^n\mathrm{e}^\alpha=1$，由此

知 n 必为偶数，且 $\alpha=0$．若用 $2k$ ($k\in\mathbf{Z}$)表示偶数 n，则知 e^z 仅以 $2k\pi\mathrm{i}$ ($k\in\mathbf{Z}$)为周期．

(5) $\mathrm{e}^{z_1}=\mathrm{e}^{z_2}$ 的充分必要条件是

$$z_1-z_2=2k\pi\mathrm{i}\ (k\in\mathbf{Z})$$

事实上，若 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$， $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则

$$\mathrm{e}^{z_1}=\mathrm{e}^{z_2}$$

即

$$\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_1}=\mathrm{e}^{x_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_2}$$

成立的充分必要条件是

$$x_1=x_2 \text{ 且 } y_2-y_1=2k\pi \qquad (k\in\mathbf{Z})$$

亦即

$$z_1-z_2=2k\pi\mathrm{i}\ (k\in\mathbf{Z})$$

(6) $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^z$ 不存在．(即 e^{∞} 无意义)

事实上，当 z 沿正实轴趋于无穷远点时($y=0,x\to+\infty$)， $\mathrm{e}^z\to+\infty$ ，当 z 沿负实轴趋于无穷远点时($y=0,x\to-\infty$)， $\mathrm{e}^z\to0$ ，故 $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^z$ 不存在．

(7)设 $z=x+\mathrm{i}y$ ，若 $y=0$ ，则 $\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x$ ；若 $x=0$ ，则

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y$$

这便是欧拉公式．

由上述性质，在将 e^x 推广到 e^z 后，函数 e^z 仍保留了某些性质(如指数的可加性)，同时也丢掉了某些性质(如当 z 不为实数， e^z 不再具有单调性)，而且还增添了某些性质(如 e^z 具有周期)．

【例 2.6】　试证 $\mathrm{e}^{-z}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^z}$ ．

证　根据定义，有

$$\frac{1}{\mathrm{e}^z}=\frac{1}{\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)}=\mathrm{e}^{-x}\frac{\cos y-\mathrm{i}\sin y}{(\cos y)^2-(\mathrm{i}\sin y)^2}=\mathrm{e}^{-x}\left[\cos(-y)+\mathrm{i}\sin(-y)\right]=\mathrm{e}^{-z}$$

【例 2.7】　计算 $\left|\mathrm{e}^{5m\mathrm{i}}\right|$ ， m 为整数．

解　$\left|\mathrm{e}^{5m\mathrm{i}}\right|=\left|\cos5m+\mathrm{i}\sin5m\right|=\sqrt{\cos^2 5m+\sin^2 5m}=1$

定义 2.8　设 $z\neq0,\infty$ ，称满足 $\mathrm{e}^w=z$ 的 w 为 z 的**对数函数**，记作

$$w=\mathrm{Ln}z$$

有了定义后，自然要考虑如何计算 $\mathrm{Ln}z$?

令 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},z\neq0,\infty,w=u+\mathrm{i}v$ 由定义 3.6 有

$$\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

于是有

$$\mathrm{e}^u=r,\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

从而有
$$u = \ln r, v = \theta + 2k\pi \qquad (k \in \mathbf{Z})$$
故得
$$\begin{aligned} w &= \mathrm{Ln}z \\ &= \ln r + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi) \qquad (k \in \mathbf{Z}) \\ &= \ln|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}z \end{aligned}$$
由此可知，对于每一个 $z \neq 0, \infty$，有无穷个不同的 w，即有
$$\begin{aligned} &\cdots\cdots \\ w_2 &= \ln|z| + \mathrm{i}(\theta + 4k\pi) \\ w_1 &= \ln|z| + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi) \\ w_0 &= \ln|z| + \mathrm{i}\theta \\ w_{-1} &= \ln|z| + \mathrm{i}(\theta - 2k\pi) \\ w_{-2} &= \ln|z| + \mathrm{i}(\theta - 4k\pi) \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$
与之对应，因此，对数函数为多值函数，从而，它不是解析函数.

【例 2.8】　计算 $\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})$.

解
$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}(1+\mathrm{i}) &= \ln|1+\mathrm{i}| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(1+\mathrm{i}) \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \qquad (k \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

【例 2.9】　计算 $\mathrm{Ln}(-1)$.

解
$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}(-1) &= \ln|-1| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(-1) \\ &= (2k+1)\pi\mathrm{i} \qquad (k \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

例 2.9 揭示了实数与复数的对数间的重大差别.

与讨论根式函数的思路一样，从以下三方面理解对数函数.

(1)对数函数 $w = \mathrm{Ln}z$ 在复平面上不是解析函数.

(2)对数函数 $w = \mathrm{Ln}z$ 在从原点 $z = 0$ 起沿负实轴剪开的复平面上可分出无穷个单值函数，称其中的每一个函数为对数函数的一个单值支，或简称一个支，特别地，称 w_0 为主值支，或主支，称 w_k 为第 k 支.

若将主值支 w_0 记作 $\ln z$，则
$$\begin{aligned} w_0 &= \ln z \\ &= \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \end{aligned}$$
由此，$\mathrm{Ln}z$ 可表示成
$$\begin{aligned} w &= \mathrm{Ln}z \\ &= \ln z + 2k\pi\mathrm{i} \qquad (k \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

这种表示不仅提供了用主值支 $\ln z$ 表示 $\mathrm{Ln}z$ 的方法，而且还揭示了 $\mathrm{Ln}z$ 与 $\ln z$ 的差异．称点 $z=0$ 为对数函数的支点，称从原点起始的负实轴为对数函数的支割线．

(3)对数函数的每一个单值支在沿从原点起始的负实轴剪开的复平面上是解析函数．由对数函数的表示式可得

$$\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2$$

关于上式，仍按第 1 章中关于无限集合相等的约定来理解．

例如，关于第一个等式应理解为当在左端任取 $\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2)$ 中的某个值 A 时，那么定能在右端从 $\mathrm{Ln}z_1$ 中取出某个值 α_1 及从 $\mathrm{Ln}z_2$ 中取出某个值 α_2，使得 $A=\alpha_1+\alpha_2$，并且，当在右端从 $\mathrm{Ln}z_1$ 中任取某个 α_1 及从 $\mathrm{Ln}z_2$ 中任取某个 α_2 时，那么定能在左端从 $\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2)$ 中取出某个 A，使得 $A=\alpha_1+\alpha_2$．

按上述理解，容易知道

$\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z\neq 2\mathrm{Ln}z$

$\mathrm{Ln}z-\mathrm{Ln}z\neq 0$

$\mathrm{Ln}z^n\neq n\mathrm{Ln}z$

$\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z}\neq \dfrac{1}{n}\mathrm{Ln}z(n>1,n\in \mathbf{Z})$

2.3.3　三角函数与反三角函数

如何定义复变量的正弦函数和余弦函数呢？从实变量的正、余弦函数均可用复指数表示

$$\cos y=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2},\quad \sin y=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}}$$

得到启示，有

定义 2.9　设 z 为复数，称

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\text{ 与 }\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

分别为 z 的**正弦函数**和**余弦函数**，分别记作

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\text{ 与 }\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

定义 2.9 建立了复变量的正弦函数及余弦函数和复变量的指数函数之间的联系，这种联系在实变量的正弦函数(或余弦函数)与实变量的指数函数之间是不存在的．

正、余弦函数的性质：

(1) $\sin z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$ 与 $\cos z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$ 在复平面解析，且有

$$(\sin z)'=\cos z,\qquad (\cos z)'=-\sin z$$

(2)三角学中实变量的三角函数间的已知公式对复变量的三角函数仍然有效

例如，由定义 2.9 可推得

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1$$

$$\text{互余性}\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+z\right)=\cos z\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+z\right)=-\sin z\end{cases}$$

$$\text{两角和}\begin{cases}\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2\\ \cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2\end{cases}$$

$$\text{奇偶性}\begin{cases}\sin(-z)=-\sin z\\ \cos(-z)=\cos z\end{cases}$$

(3) $\cos z+\mathrm{i}\sin z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ (欧拉公式普遍成立)；

(4) $\sin z$ 仅在 $z=k\pi$ 处为零， $\cos z$ 仅在 $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 处为零，其中的 k 为整数；

事实上，$\sin z=0$ 的充分必要条件是 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}=1$，由此可得 $z=k\pi$ (k 为整数). 仿此，可得 $\cos z$ 仅在 $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ (k 为整数)处为零；

(5) $\sin z$ 与 $\cos z$ 均以 $2k\pi$ (k 为整数)为周期；

(6)命题“若 z 为复数，则 $|\sin z|\leqslant 1, |\cos z|\leqslant 1$ ”不真；

(7) $\lim\limits_{z\to\infty}\sin z$ 与 $\lim\limits_{z\to\infty}\cos z$ 均不存在.

【例 2.10】　试证 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1=2\mathrm{i}\sin z\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$

证　$2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin z=2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1=$ 左边

【例 2.11】　试证

$$1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\cdot\cos\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

证　方法 1　令

$$A=1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$$
$$B=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$$

于是

$$\begin{aligned}A+B\mathrm{i}&=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\\&=\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\\&=\frac{2\mathrm{i}\sin\dfrac{n+1}{2}x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x}}{2\mathrm{i}\sin\dfrac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\end{aligned}$$

$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot e^{i\frac{n}{2}x}=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{n}{2}x+i\sin\frac{n}{2}x\right)$$

故

$$1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

方法 2　因为 $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

所以

$$\begin{aligned}1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx&=\frac{1+1}{2}+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+\cdots+\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\\&=\frac{1}{2}(1+e^{ix}+\cdots+e^{inx})+\frac{1}{2}(1+e^{-ix}+\cdots+e^{-inx})\\&=\frac{1}{2}\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}+\frac{1}{2}\frac{e^{-i(n+1)x}-1}{e^{-ix}-1}\\&=\frac{1}{2}\frac{2i\sin\frac{n+1}{2}x\cdot e^{i\frac{n+1}{2}x}}{2i\sin\frac{x}{2}\cdot e^{i\frac{x}{2}}}+\frac{1}{2}\frac{-2i\sin\frac{n+1}{2}x\cdot e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{-2i\sin\frac{x}{2}\cdot e^{-i\frac{x}{2}}}\\&=\frac{2i\sin\frac{n+1}{2}x}{2i\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{e^{i\frac{n}{2}x}+e^{-i\frac{n}{2}x}}{2}\\&=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{n}{2}x\end{aligned}$$

【例 2.12】　计算 $\cos(1+i)$ 的值.

解　由定义得

$$\cos(1+i)=\frac{e^{i(1+i)}+e^{-i(1+i)}}{2}=\frac{1}{2}(e^{-1}+e)\cos 1+i\frac{1}{2}(e^{-1}-e)\sin 1$$

其他复变数的三角函数的定义如下：

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}，\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}，\quad \sec z=\frac{1}{\cos z}，\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}$$

反三角函数作为三角函数的反函数，定义如下：

定义 2.10　如果 $\cos w=z$，则 w 称为 z 的**反余弦函数**，记为 $\arccos z$，即

$$w = \arccos z$$

将 $z = \cos w = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w})$ 两端同乘以 $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$ 得

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w} - 2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + 1 = 0$$

于是有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = z + \sqrt{z^2 - 1}$，再由对数函数的定义即得

$$\mathrm{i}w = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

所以

$$\arccos z = w = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

用同样的方法可以定义其余反三角函数，下面仅列出反正弦函数和反正切函数：

$$\arcsin z = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}\right),\quad \arctan z = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{\mathrm{i} + z}{\mathrm{i} - z}$$

对正切与余切函数、反正切与反余切函数的计算公式可依照三角学中的定理类推.

2.3.4　一般幂函数与一般指数函数

定义 2.11　设 $z \neq 0, \infty$，a 为复数，称

$$z^a = \mathrm{e}^{a\mathrm{Ln}z}$$

为 z 的**一般幂函数**．当 $z = 0$，且 $a \neq 0$ 时，规定 $z^a = 0$．

依此定义，当 $a = \mathrm{i}$ 时，有

$$z^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i})}\qquad (k \in \mathbf{Z})$$

故 z^{i} 为多值函数，又当 $a = 3$ 时，有

$$z^3 = \mathrm{e}^{3\mathrm{Ln}z} = |z|^3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\arg z}$$

故 z^3 为单值函数.

定义 2.12　设 $a \neq 0, \infty$，z 为复数，称

$$a^z = \mathrm{e}^{z\mathrm{Ln}a}$$

为**一般指数函数**．当 $a > 0$ 时，规定 $a^z = \mathrm{e}^{z\ln a}$．

【例 2.13】　计算 $5^{1+\mathrm{i}}$ 的值.

解　$5^{1+\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\ln 5} = \mathrm{e}^{\ln 5}\left[\cos(\ln 5) + \mathrm{i}\sin(\ln 5)\right]$

【例 2.14】　计算 i^{i} 的值.

解　$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}\arg\mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}\quad (k \in \mathbf{Z})$

【例 2.15】　试解方程 $\ln z + \dfrac{\pi}{6}\mathrm{i} = 2$．

解　将原方程变形为　$\ln z = 2 - \dfrac{\pi}{6}\mathrm{i}$

由对数函数定义得

$$z=\mathrm{e}^{2-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}=\mathrm{e}^2\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^2$$

2.3.5　双曲函数与反双曲函数

定义 2.13　$\mathrm{sh}z=\dfrac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{2}$，$\mathrm{ch}z=\dfrac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2}$，$\mathrm{th}z=\dfrac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}$，$\mathrm{cth}z=\dfrac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}$分别称为复变量$z$的双曲正弦函数、双曲余弦函数、双曲正切函数及双曲余切函数.

双曲函数与三角函数之间有下列关系：

$$\mathrm{sh}z=-\mathrm{i}\sin\mathrm{i}z,\quad \mathrm{ch}z=\cos\mathrm{i}z,\quad \mathrm{th}z=-\mathrm{i}\tan\mathrm{i}z,\quad \mathrm{cth}z=\mathrm{i}\cot\mathrm{i}z$$

由这些关系也可以看出双曲函数是单值的且以虚数$2\pi\mathrm{i}$为周期的周期函数.$\mathrm{sh}z$为奇函数，$\mathrm{ch}z$为偶函数，而且在复平面内均解析，并有

$$(\mathrm{sh}z)'=\mathrm{ch}z,\quad (\mathrm{ch}z)'=\mathrm{sh}z$$

由于双曲函数的周期性决定了它们的反函数——反双曲函数的多值性，这里仅将相应的反双曲函数分列如下：

反双曲正弦函数$\mathrm{arsh}z=\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)$

反双曲余弦函数$\mathrm{arch}z=\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$

反双曲正切函数$\mathrm{arth}z=\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}$

反双曲余切函数$\mathrm{arth}z=\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{z+1}{z-1}$

2.4　习　　题

1．下列函数何处可导？是否可导解析：

(1) $f(z)=x^2-\mathrm{i}y$；

(2) $f(z)=2x^3+3y^3\mathrm{i}$；

(3) $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$；

(4) $f(z)=x^2-y^2-2xy\mathrm{i}$.

2．试确定下列函数的解析函数区域和奇点，并求出导数.

(1) $f(z)=(z+4)^3$；

(2) $f(z)=z^3+2\mathrm{i}z$；

(3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$；

(4) $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^3+1}$.

3．试证下列函数在 Z 平面上任何点都不解析.

(1) $f(z)=x+2y\mathrm{i}$；

(2) $f(z)=\operatorname{Re} z$；

(3) $f(z)=\dfrac{1}{|\bar{z}|}$；

(4) $f(z)=x+y$.

4．若 $f(z)$ 在 z_0 处解析，试证：$f(z)$ 在 z_0 处连续.

5．设 $f(z)$ 在点 z_0 连续，证明：$f(z)$ 在 z_0 的某一个邻域内有界.

6．设 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数，且在 D 内 $f'(z)=0$，证明：$f(z)$ 在区域 D 内恒等于常数.

7．证明：如果函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析，并满足下列条件之一，那么 $f(z)$ 是常数.

(1) $f(z)$ 是恒取实数；

(2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析；

(3) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数；

(4) $\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数；

(5) $\operatorname{Re} f(z)$ 或 $\operatorname{Im} f(z)$ 在 D 内解析；

(6) $au+bv=c$，其中 a，b 与 c 为不全为零的实常数；

(7) $v=u^2$.

8．用导数定义证明：$(z^2)'=2z$.

9．如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是 z 的解析函数，证明：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$$

10．设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)$，证明：柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

11．下列关系是否正确？

(1) $\overline{\mathrm{e}^{z}}=\mathrm{e}^{\bar{z}}$；

(2) $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}=\mathrm{e}^{\overline{\mathrm{i}z}}$；

(3) $\overline{\sin z}=\sin\bar{z}$；

(4) $\overline{\cos z}=\cos\bar{z}$.

12．证明：e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的函数.

13．证明：

(1) $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$；

(2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$；

(3) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$；

(4) $\sin 2z=2\sin z\cos z$；

(5) $\operatorname{ch}2z=\operatorname{sh}^2 z+\operatorname{ch}^2 z$.

14．化简：

(1) $e^{1+\pi i}+\cos i$；

(2) $\cos(i\ln 5)$.

15．求 $\ln(-i)$，$\ln(-3+4i)$ 和它们的主值.

16．求 $\sin(1+i)$，$\cos i$，$e^{1-\frac{\pi}{2}i}$，3^i 和 $(1+i)^i$ 的值.

17．解下列方程：

(1) $e^z=-4$；

(2) $\ln z=\dfrac{\pi}{2}i$；

(3) $\cos z=2$；

(4) $\operatorname{sh} z=0$；

(5) $e^z=1+\sqrt{3}i$.

第 3 章　复变函数的积分

教学提示：同高等数学一样，在复变函数中积分法也是研究复变函数性质的重要方法和解决实际问题的有力工具．本章涉及的内容不仅是探讨解析函数性质的理论基础，而且在以后的章节中，直接或间接地经常要用到．

教学目标：掌握复变函数积分的定义，了解其基本性质，掌握复变函数积分的一般计算方法；掌握柯西积分定理及其推论，熟练掌握用柯西积分公式及高阶导数公式计算积分；了解解析函数无限次可导的性质，了解莫瑞拉定理．

3.1　复变函数的积分概念

3.1.1　复积分的定义

同高等数学一样，也采用“分割”、“作和”、“取极限”的步骤来定义积分．

定义 3.1　设C为一条起点在a，终点在b的有向光滑曲线(或逐段光滑曲线)，其方程为

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\quad ,(\alpha \leqslant t\leqslant \beta, a=z(\alpha), b=z(\beta))$$

函数$f(z)$定义在C上用一组点$z_0=a, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n=b$沿曲线从$a$到$b$分割$C$ (见图 3.1)．

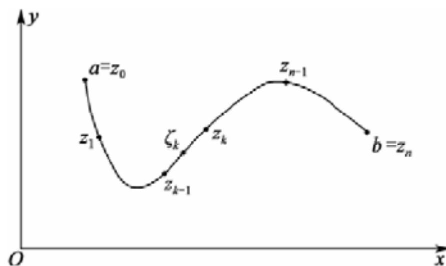


图 3.1

设$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$，ζ_k为弧$z_{k-1}z_k$上任意一点，作和$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k$．

当分点无限增加，并且分割C所得诸弧段长度中的最大值$d\to 0$时，若不论对C的分法及ζ_k取法如何，S_n存在极限S，则称$f(z)$沿C(从a到b)**可积**，称S为$f(z)$**沿**C **(从**a**到**b**)的积分**，记作

$$S=\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

其中 $f(z)$ 称为**被积函数**，C 称为**积分路径**(或积分道路)，

$$S=\lim_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}} S_n$$

【例 3.1】　设 C 是一条起点为 a 终点为 b 的逐段光滑曲线，试计算 $S=\int_C \mathrm{d}z$.

解　现在，只能用定义计算该积分，依定义，将 $f(z)=1$ 代入，有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})=b-a$$

故

$$\int_C \mathrm{d}z=\lim_{d\to 0} S_n=b-a$$

此例揭示了函数 $f(z)=1$ 的一个深刻性质：复变函数 $f(z)=1$ 的积分只依赖于积分路径 C 的起点 a 与终点 b，而与积分路径的形状无关.

有了积分定义后，最先关心的问题是：积分存在的条件，积分的性质与积分的计算. 下面就来讨论这几个问题.

3.1.2　复积分存在的一个条件

为了寻求复变函数积分存在的条件，现在唯一可利用的只有定义. 于是问题就归结为考察极限 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}} S_n$ 的存在条件. 为此，不妨将 S_n 变形后再加以考察.

设

$$\begin{aligned}
&f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\\
&\Delta z_k=\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k\\
&\Delta x_k=x_k-x_{k-1},\Delta y_k=y_k-y_{k-1}\\
&\zeta_k=\xi_k+\mathrm{i}\eta_k\\
&u_k=u(\xi_k,\eta_k),v_k=v(\xi_k,\eta_k)
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\mathrm{d}z&=\lim_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}} S_n=\lim_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k=\lim_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k+\mathrm{i}\eta_k)(\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k)\\
&=\lim_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}}\sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)+\mathrm{i}v(\xi_k,\eta_k)\right]\left[\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k\right]\\
&=\lim_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}}\sum_{k=1}^{n}(u_k+\mathrm{i}v_k)(\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k)\\
&=\lim_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}}\sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k-v_k\Delta y_k)+\mathrm{i}\lim_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}}\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k-u_k\Delta y_k)
\end{aligned}$$

由高等数学知道，当 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 C 上连续时，上式右端两个极限存在，且分别

为 $\int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y$ 与 $\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$.

至此，获得积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在的一个条件是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 均在 C 上连续. 而 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 C 上连续等价于 $f(z)$ 在 C 上连续，所以，函数 $f(z)$ 在 C 上连续是积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在的一个条件，并且，还得到了

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$$

由以上讨论获得

定理 3.1　若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在曲线 C 上连续，则 $f(z)$ 沿 C 可积，并有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y \tag{3.1}$$

$$\overset{\text{记忆方式}}{=} \int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)$$

由定理 3.1 可得：其一，它给出了复变函数积分存在的一个充分条件；其二，它提供了计算复变函数积分的一种方法；其三，式(3.1)表明，研究复变函数的积分问题，可以转化为研究实变量的二元实值函数沿曲线 C 的线积分问题.

3.1.3　复积分的性质与计算

由式(3.1)容易想到，线积分的一些性质可移到复变函数的积分上来.

若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 沿曲线 C, C^- (C^- 按约定表示与曲线 C 方向相反的同一条曲线)可积，则有

(1) $\int_C Af(z)\mathrm{d}z = A\int_C f(z)\mathrm{d}z$　　(A 为复常数)

(2) $\int_C [f(z)\pm g(z)]dz = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z$

(3) $\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$

(4) $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$ (C 由 C_1 与 C_2 首尾相接而成)

(5)设 L 为曲线 C 的长度，若 $f(z)$ 沿 C 可积，且在 C 上满足 $|f(z)|\leqslant M$，则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \leqslant ML \tag{3.2}$$

式(3.2)提供了一种估计复变函数积分的模的方法.

到现在为止，计算复变函数积分只有两种方法，一是定义，二是式(3.1). 有无其他方法呢？

由于积分路径常取光滑曲线(或逐段光滑曲线)，所以 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分可归结为 $f[z(t)]$ 关于曲线 C 的参数的积分.

事实上，若 C 为光滑曲线(或逐段光滑曲线)

$$\begin{aligned} z &= z(t) \\ &= x(t) + \mathrm{i}y(t), (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \end{aligned}$$

则 $z'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，且 $z'(t) = x'(t) + \mathrm{i}y'(t) \neq 0$．再设 $f(z)$ 在 C 上连续及

$$\begin{aligned} f[z(t)] &= u[x(t), y(t)] + \mathrm{i}v[x(t), y(t)] \\ &= u_1(t) + \mathrm{i}v_1(t) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y \\ &= \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t + \\ &\quad \mathrm{i}\int_\alpha^\beta \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t \\ &= \int_\alpha^\beta [u_1(t) + \mathrm{i}v_1(t)][x'(t) + \mathrm{i}y'(t)]\mathrm{d}t \\ &= \int_\alpha^\beta f[z(t)]\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.3}$$

这样一来，便将 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分归结为 $f(z)$ 关于曲线 C 的参数 t 的积分．

由以上讨论可知，用式(3.3)计算积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 包含三个步骤：一是写出曲线 C 的方程 $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$；二是将 $z = z(t)$ 与 $\mathrm{d}z = z'(t)\mathrm{d}t$ 代入所求积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 中；三是计算式(3.3)右端的关于参数 t 的积分．

【例 3.2】　计算 $\int_C z\mathrm{d}z$，其中 C 为起点在 a 终点在 b 的一条逐段光滑曲线．

解　用定义计算．

因 $f(z) = z$，所以，若取 $\zeta_k = z_{k-1}$，则有 $f(\zeta_k) = z_{k-1}$，作和

$$A_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^n z_{k-1}(z_k - z_{k-1})$$

又因 $f(z) = z$ 在 C 上连续，所以，积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 一定存在，于是有

$$\int_C f(\mathrm{z})\mathrm{d}\mathrm{z} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} A_n \tag{3.4}$$

另外，若取 $\zeta_k = z_k$，则 $f(\zeta_k) = z_k$，作和

$$B_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^n z_k(z_k - z_{k-1})$$

后，再由积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 的存在性，有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} B_n \tag{3.5}$$

由式(3.4)与式(3.5)得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}}(A_n + B_n)$$
$$= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

此例揭示了 $f(z)=z$ 的一个很好的性质：函数 $f(z)=z$ 沿曲线 C 的积分只依赖于 C 起点与终点，而与 C 的形状无关.

【例 3.3】 试计算 $\int_C x\mathrm{d}z$，其中 C 为起点在 $z=0$，终点在 $z=1+\mathrm{i}$ 的直线段(见图 3.2).

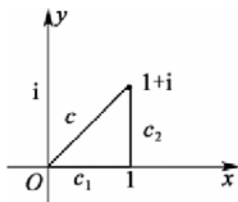


图 3.2

解 用式(3.3)计算

首先，写出 C 的方程为

$$z = z(t) = (1+\mathrm{i})t, (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

其次，由 $x+\mathrm{i}y = z = z(t) = (1+\mathrm{i})t$ 得 $\mathrm{d}z = z'(t)\mathrm{d}t = (1+\mathrm{i})\mathrm{d}t$，将 $x=t$ 与 $\mathrm{d}z$ 代入所求积分，得 $\int_C x\mathrm{d}z = \int_0^1 (1+\mathrm{i})t\mathrm{d}t$

最后，计算上式右端的积分得 $\int_C x\mathrm{d}z = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$

【例 3.4】 设 Γ 为由 C_1 与 C_2 首尾相接而成的起点在 $z=0$，终点在 $z=1+\mathrm{i}$ 的曲线(见图 3.2)，计算 $\int_\Gamma x\mathrm{d}z$.

解 首先，写出 C_1 与 C_2 的方程为

$$C_1\text{: } z = z(t) = t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$$
$$C_2\text{: } z = z(t) = 1 + \mathrm{i}t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$$

其次，在 C_1 上有 $x=t, \mathrm{d}z = \mathrm{d}t$，代入 $\int_{C_1} x\mathrm{d}z$ 得 $\int_{C_1} x\mathrm{d}z = \int_0^1 t\mathrm{d}t$

在 C_2 上有 $x = \mathrm{Re}\,z(t) = 1, \mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{d}t$，代入 $\int_{C_2} x\mathrm{d}z$ 得 $\int_{C_2} x\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{i}\mathrm{d}t$

最后，计算积分得

$$\int_\Gamma x\mathrm{d}z = \int_{C_1} x\mathrm{d}z + \int_{C_2} x\mathrm{d}z = \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_0^1 \mathrm{i}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \mathrm{i}$$

【例 3.5】 试证

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1; \\ 0, & n\neq 1\text{且为整数}. \end{cases}$$

其中 C 为以 a 为圆心，以 R 为半径的圆周.

证　这里的C是一条围线，对于沿围线的积分，若无特殊声明，则今后总理解为沿围线的正向积分.

用计算积分的方法来证明本题.

首先，写出C的方程为

$$\begin{aligned} z &= z(t) \\ &= a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \end{aligned}$$

其次，$\mathrm{d}z = \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$，被积函数当$n=1$时为$(z-a)^{-1} = R^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$，当$n \neq 1$且为整数时为$(z-a)^{-n} = R^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$.

再次，计算积分，$n=1$时，有

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\mathrm{i} \end{aligned}$$

当 $n \neq 1$且为整数时，有

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\mathrm{i}}{R^{n-1}}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\mathrm{i}}{R^{n-1}}\left[\int_0^{2\pi}\cos(n-1)\theta\mathrm{d}\theta - \mathrm{i}\int_0^{2\pi}\sin(n-1)\theta\mathrm{d}\theta\right] = 0 \end{aligned}$$

综上所述，问题得证.

【例 3.6】　计算积分$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z}{z-1}\mathrm{d}z$.

解　由积分路径为$|z-1|=1$，得$z-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$，于是，积分路径的方程为

$$z = z(\theta) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

故

$$\begin{aligned} \oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z}{z-1}\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\mathrm{i} \end{aligned}$$

【例 3.7】　计算积分$\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{3z^2}{(z-2)^3}\mathrm{d}z$.

解　由$|z-2|=1$得积分路径的方程为

$$z = z(\theta) = 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

于是

$$\oint_{|z-2|=1}\frac{3z^2}{(z-2)^3}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{3\left(2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=3\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\left(4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}+4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=6\pi\mathrm{i}$$

3.2 积分基本定理

通过上节的例子可以发现，有的函数的积分只依赖于积分路径的起点与终点，而与积分路径的形状无关，而有的函数，其积分不仅与积分路径的起点与终点有关，而且与积分路径的形状也有关．深入观察后，可知，前一类函数是解析函数．由此，可提出猜想：解析函数的积分只依赖于积分路径的起点与终点，而与积分路径的形状无关．柯西在 1825 年给出此定理对猜想作了回答．

3.2.1 单连通区域的柯西定理——柯西-古萨基本定理

定理 3.2 设 G 为复平面上的单连通区域，C 为 G 内的任意一条围线(见图 3.3)，若 $f(z)$ 在 G 内解析，则 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$．

图 3.3

证 用黎曼(1851 年在添加条件下给出)的证明方法，依此法，是在添加条件“ $f'(z)$ 在 G 内连续”下证明．

设 $z=x+\mathrm{i}y, f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ ，由式(3.1)有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\oint_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\oint_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y$$

由于 $f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_x-\mathrm{i}u_y$ 在 G 内连续，所以，u_x，u_y，v_x，v_y 在 G 内连续，从而，这四个偏导数在由围线 C 及其内部构成的闭区域 D 上连续．又因 C 为光滑或逐段光滑的闭曲线，且 u 与 v 在 D 上连续是显然的．于是，由高等数学中的格林公式得

$$\oint_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y=\iint_D(-v_x-u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y=\iint_D(u_x-v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而由 $f(z)$ 在 G 内解析知道，u 与 v 满足 C.-R.条件

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x$$

由此得

$$\iint_D(-v_x-u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(u_x-v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

从而得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$$

定理 3.2 称为**积分基本定理**，又常称作**柯西-古萨基本定理**(或**柯西积分定理**).

定理 3.2 揭示了解析函数的一个深刻性质，即解析函数沿其解析区域内的任意一条围线的积分为零，亦即解析函数的积分只依赖于积分路径的起点与终点，而与积分路径的形状无关.

另外，定理 3.2 提供了一种计算解析函数沿围线积分的方法.

【例 3.8】　计算积分 $\oint\limits_{|z|=5}(2z^2+\mathrm{e}^z+\cos z)\mathrm{d}z$.

解　因为 $2z^2,\mathrm{e}^z,\cos z$ 均在复平面上解析，所以，它们的和在一包含积分路径 $|z|=5$ 的单连通区域 G 内解析，而积分路径 $|z|=5$ 是围线，所以，由定理 3.2 得

$$\oint\limits_{|z|=5}(2z^2+\mathrm{e}^z+\cos z)\mathrm{d}z=0$$

显然，该例所用方法是最简单的.

【例 3.9】　计算积分 $\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{4}}\frac{3z}{(z-2)(z-1)}\mathrm{d}z$.

解　为便于应用定理 3.2，作区域 $G:|z+1|<1$ ，显然，积分路径 $|z+1|=1/4$ 位 G 内. 由定理 3.2 得

$$\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{4}}\frac{3z}{(z-2)(z-1)}\mathrm{d}z=0$$

深入思考定理 3.2 的条件与证明方法后，会有以下三个问题：

(1)该定理是否有不添加条件“ $f'(z)$ 在 G 内连续”的证明方法？

(2) $f(z)$ 在积分路径 C 上解析的条件可否减弱？

(3)如果 G 是复连通区域，那么，定理是否仍然有效？

关于(1)，古萨(法国，1900 年发表)在不添加“ $f'(z)$ 在 G 内连续”的条件下给出了定理 3.2 的证明.

关于(2)，泼拉德(于 1923 年)证明了定理 3.3.

定理 3.3　(泼拉德定理)设围线 C 是单连通区域 G 的边界，若 $f(z)$ 在 G 内连续内解析，且在 $\overline{G}$ 上连续，则

$$\oint\limits_{C}f(z)\mathrm{d}z=0$$

对定理 3.2 与定理 3.3 的证明感兴趣的读者可读教材所介绍的参考书.

有了定理 3.3 后，例 3.8 与例 3.9 的计算就更简单了. 读者不妨试一试.

关于(3)，人们获得了定理 3.4.

3.2.2　复连通区域的柯西定理——复合闭路定理

定理 3.4　设有围线 C_0，C_1，$C_2,\cdots$，C_n，其中 C_1，$C_2,\cdots$，C_n 中的每一条均在其余各条的外部，而它们又全都在 C_0 的内部；又设 G 为由 C_0 的内部与 C_1，$C_2,\cdots$，C_n 的外部相交的部分组成的复连通区域(见图 3.4)，若 $f(z)$ 在 G 内解析，且在闭区域 $\overline{G}$ 上连续，则

$$\oint_{C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{3.6}$$

证　不失一般性，仅就G只由两条围线围成的情形证明(见图 3.5).

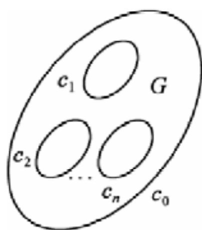


图 3.4

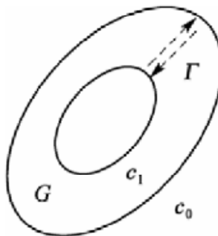


图 3.5

此时，即证

$$\oint_{C_0+C_1^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

为此，在C_0与 C_1之间引一条辅助线段(除端点外全在G内)，用Γ连接C_0与C_1．此时可视Γ将G“割破”而形成一单连通区域(见图 3.5)，对该区域，$f(z)$满足定理 4.3 的条件，于是，有

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{\Gamma^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

即

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z + +\oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

亦即

$$\oint_{C_0+C_1^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

对于定理 3.4，也称为**复合闭路定理**．从定理的证明过程中，可知，在区域内的一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内做连续变形而改变它的值，只要在变形过程中曲线不经过函数的奇点就行．这一个重要的事实，称为**闭路变形原理**．

从这个定理，容易看到两点意义：一是，它揭示了解析函数的一个性质——在一定条件下，解析函数沿复连通区域边界的积分等于零；二是，它提供了一种计算函数沿围线积分的方法．

现在，如果再深入地观察一下定理 3.4，那么，将会有更深的认识．事实上，如果将式(3.6)变形为

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z \tag{3.7}$$

那么，关于定理 3.4，又可获得两点认识：一是，若称C_0为复连通区域G的**外边界**，

称$C_1+C_2+\cdots+C_n$为复连通区域的**内边界**(一般约定区域边界的方向是按沿边界的正向行进时区域的内部总在边界的左手侧)，则由式(3.7)得到，$f(z)$沿外边界的积分等于它沿内边界的积分．二是，提供了一种计算积分的方法．此方法，既可计算$f(z)$沿C_0的积分，也可将$f(z)$沿某条围线$C_m(1\leqslant m\leqslant n)$的积分归结为计算$f(z)$沿$C_0$，$C_1,\cdots,C_{m-1},C_{m+1},\cdots$，$C_n$的积分．

不仅如此，利用式(3.7)还可以计算一类在区域D中只含有有限个奇点的函数的积分问题．

事实上，比如，若$f(z)$在C围成的单连通区域D内除有限个奇点$a_1,a_2,\cdots,a_n$外是解析的，且在$\overline{D}$上除这有限个奇点外是连续的，则要计算$f(z)$沿C的积分时就可这样做(为行文方便起见，称此做法为“挖奇点”法)：作n条分别包含奇点$a_1,a_2,\cdots,a_n$的围线C_1，$C_2,\cdots$，C_n，使它们与C一起满足定理 3.4 的条件，于是，由式(3.7)即可将$\oint_C f(z)\mathrm{d}z$求出．

【例 3.10】　试证

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi\mathrm{i} & ,n=1;\\ 0 & ,n\neq 1\text{且为整数}.\end{cases}$$

其中的C是围线，其内部含点$z=a$．

证　用计算积分完成证明．由于被积函数在C内部只含一个奇点$z=a$，所以，可用“挖奇点”法计算积分．

为此，作$\varGamma:|z-a|=R$，使$\varGamma$与C满足定理 3.4 的条件．于是，由式(3.7)得

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}=\oint_\varGamma \frac{1}{(z-a)^n}$$

再由例 3.5 得

$$\oint_\varGamma \frac{1}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi\mathrm{i} & ,n=1;\\ 0 & ,n\neq 1\text{且为整数}.\end{cases}$$

从而证得

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi\mathrm{i} & ,n=1;\\ 0 & ,n\neq 1\text{且为整数}.\end{cases}$$

【例 3.11】　计算积分

$$\int_C \frac{3z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z \quad ,C:|z|=5$$

解　设$f(z)=\dfrac{3z-1}{z^2-z}=\dfrac{3z-1}{z(z-1)}$

由于被积函数$f(z)$在积分路径C的内部只含有两个奇点$z=0$与$z=1$，所以，可用“挖奇点”法计算．为此，作$C_1:|z|=1/2$与$C_2:|z|=1/6$，由于$f(z),C_1,C_2$及C满足定理 3.4 的条件，所以，由式(3.7)得

$$\int_C \frac{3z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z = \int_{C_1} \frac{3z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{3z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z$$

而

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \frac{3z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z &= \int_{C_1}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z-1}\right)\mathrm{d}z \\ &= \int_{C_1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z + \int_{C_1}\frac{2}{z-1}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}+0 = 2\pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \frac{3z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z &= \int_{C_2}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z-1}\right)\mathrm{d}z \\ &= \int_{C_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z + \int_{C_2}\frac{2}{z-1}\mathrm{d}z = 0+4\pi\mathrm{i} = 4\pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

故

$$\int_C \frac{3z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z = 6\pi\mathrm{i}$$

3.3　积分基本公式与高阶导数公式

观察等式

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{3z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \text{ 与 } \int_{|z|=\frac{1}{6}} \frac{3z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z = 4\pi\mathrm{i}$$

的左端与右端的特征，再寻找将它的变形后的等式的左端与右端的联系后，发现它们均满足

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(z_0)$$

于是，可提出下面的问题来研究：等式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

对于$f(z)$来说，是否是必然规律？

积分基本公式对此作了回答.

3.3.1　积分基本公式

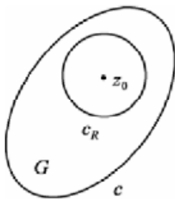


图 3.6

定理 3.5　设G是以围线C为边界的单连通区域(见图 3.6)，若$f(z)$在G内解析，且在C上连续，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \tag{3.8}$$

证　作$C_R: |z-z_0| = R$，使得C_R连同其内部全含于G中，由定理 3.4 得

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \oint_{C_R} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \tag{3.9}$$

因 $f(z)$ 在点 z_0 连续，所以，对任意小的正数 ε 总可取到使式(3.9)成立的充分小的正数 R，使得

$$\left|f(z)-f(z_0)\right|<\varepsilon \qquad , \ z\in C_R$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z - f(z_0)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_R} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z - f(z_0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_R} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z - f(z_0)\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_R}\frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{R}\cdot 2\pi R = \varepsilon\end{aligned}$$

故

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z - f(z_0)\right| = 0$$

从而

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z - f(z_0) = 0$$

于是证得

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z , \qquad z_0\in G$$

称式(3.8)为**积分基本公式**或**柯西积分公式**.

定理 3.5 对于由 $n+1$ 条围线 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 所围成的复连通区域(如定理 3.4 那样构成)仍然有效. 此时，在定理 3.4 的条件下，对于 G 中的点 z_0 有

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_0}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z - \cdots - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_n}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{3.10}$$

定理 3.5 从揭示解析函数的性质、表示解析函数及提供计算积分的方法等三方面给我们以启示.

定理 3.5 提供了计算哪类积分的方法呢？将式(3.8)变形为

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(z_0), \qquad z_0 \in G \tag{3.11}$$

由此可知，定理 3.5 提供了计算如式(3.11)左端的积分的方法．这类积分的特征是：积分路径是围线，被积函数为分式，它在积分路径内部只含一个奇点，且该奇点是使分母 $z-z_0$ 为零的点，而在积分路径上无被积函数的奇点．

【例 3.12】 计算积分 $\int\limits_{|z-1|=4} \frac{z}{z-1}\mathrm{d}z$．

解 首先，识别积分的类型．它是具有式(3.11)左端积分的特征的那类积分．

其次，将所求积分与式(3.11)左端的积分比较后，知道所求积分在形式上与式(3.11)左端的积分相同．由此想到利用式(3.11)计算积分．

最后，经验证，所求积分满足定理 3.5 的条件，于是，由式(3.11)得

$$\int\limits_{|z-1|=4} \frac{z}{z-1}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\left[z\right]_{z=1} = 2\pi \mathrm{i}$$

【例 3.13】 计算积分 $\int\limits_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{5}} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$．

解 首先，识别积分类型．它是具有式(3.11)左端积分的特征的那类积分．

其次，将所求积分与式(3.11)左端的积分比较，在形式上是不一样的．但是，如果将它变形为

$$\int\limits_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{5}} \frac{\dfrac{\mathrm{e}^z}{z(z+\mathrm{i})}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z$$

那么，在形式上与式(3.11)左端的积分一样．由此想到利用式(3.11)计算．

最后，经验证，所求积分满足定理 3.5 的条件，于是，由式(3.11)得

$$\int\limits_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{5}} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \int\limits_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{5}} \frac{\dfrac{\mathrm{e}^z}{z(z+\mathrm{i})}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{z(z+\mathrm{i})}\right]_{z=\mathrm{i}}$$

$$= \frac{\pi}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}} = \pi(\sin 1 - \mathrm{i}\cos 1)$$

【例 3.14】 计算积分 $\int\limits_C \frac{3z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z \quad ,C:|z|=5$．

解 首先，识别积分类型．由于被积函数在积分路径内部含有两个奇点 $z=0$ 与 $z=1$，所以，想到用“挖奇点”法来计算．

其次，为了用“挖奇点”法，作 $C_1:|z|=\frac{1}{4}$ 与 $C_2:|z|=\frac{1}{6}$，由定理 3.4 有

$$\int_C \frac{3z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z = \int_{C_1} \frac{3z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{3z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z$$

最后，计算上式右端两个积分，对这两个积分分别重复例 3.4 的解题步骤，得

$$\int_{C_1} \frac{3z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z = \int_{C_1} \frac{\frac{3z-1}{z-1}}{z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{3z-1}{z-1}\right]_{z=0} = 2\pi\mathrm{i}$$

$$\int_{C_2} \frac{3z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z = \int_{C_2} \frac{\frac{3z-1}{z}}{z-1}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{3z-1}{z}\right]_{z=1} = 4\pi\mathrm{i}$$

故
$$\int_C \frac{3z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z = 6\pi\mathrm{i}$$

例 3.14 与例 3.11 题目相同，但解法不完全相同，希望读者比较两种解法的异同.

3.3.2　高阶导数公式

通过前面的学习，掌握了解析函数的导数和积分，通过例子和练习，思考后可提出问题：解析函数的导函数是否一定为解析函数？若是，则其导函数可否用一公式来表示呢？

定理 3.6 对此给予了回答.

定理 3.6　设 G 是以围线 C 为边界的单连通区域(见图 3.7)，若 $f(z)$ 在 G 内解析，且在 $\overline{G}$ 上连续，则 $f(z)$ 在区域 G 内有各阶导数，并且有

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z, \qquad z_0 \in G \qquad (3.12)$$

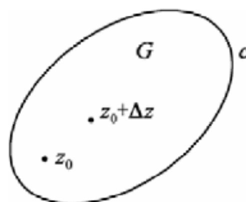


图 3.7

证　利用数学归纳法证明该定理.

(1)设 $n=1$，若证式(3.12)成立，即证

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z, \qquad z_0 \in G \qquad (3.13)$$

欲证式(3.13)，只须证

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z, \qquad z_0 \in G$$

为此，设 C 的长度为 λ，$f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \leqslant M$，令

$$d = \inf_{z\in C}\{|z-z_0|\}$$

由定理 3.5 有

$$f\left(z_0+\Delta z\right)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}\mathrm{d}z, \quad \left(z_0+\Delta z\right)\in G$$

$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z, \qquad z_0\in G$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}&=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \left[\frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}-\frac{f(z)}{z-z_0}\right]\mathrm{d}z\cdot\frac{1}{\Delta z}\\&=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z\right|\\=&\left|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{\Delta z f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}M\lambda\frac{1}{\mathrm{d}^2}\frac{|\Delta z|}{(\mathrm{d}-|\Delta z|)}\to 0(\Delta z\to 0)\end{aligned}$$

即

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z, \qquad z_0\in G$$

故

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z, \qquad z_0\in G$$

(2)设 $n=k$ 时，式(3.12)成立，若证 $n=k+1$ 时，式(3.12)成立，即证

$$f^{(k+1)}(z_0)=\frac{(k+1)!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+2}}\mathrm{d}z, \qquad z_0\in G$$

由于证明方法与(1)相同，而计算又较繁，所以，将证明略去.

由(1)与(2)证得定理 3.6 成立.

定理 3.6 对于由 $n+1$ 条围线 $C_0,C_1,C_2,\cdots,C_n$ 所围成的复连通区域 G (如定理 3.4 那样构成)仍然有效.

定理 3.6 从揭示解析函数的性质、表示解析函数的导函数 $f^{(n)}(z_0)$ 及提供计算积分的方法等三方面给予启示.

定理 3.6 提供了计算哪类积分的方法呢？将式(3.12)变形为

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi \mathrm{i}}{n!}f^{(n)}(z_0), \qquad z_0\in G \tag{3.14}$$

由此可知，定理 3.6 提供了计算如式(3.14)左端的积分的方法. 这类积分的特征是：积

分路径是围线，被积函数为分式，它在积分路径内部只含一个奇点，且该奇点是使分母 $(z-z_0)^{n+1}$ 为零的点，而在积分路径上无被积函数的奇点．(这类积分的特征“似曾相识”，为了更好地识别积分类型，读者不妨寻找一下式(3.11)与式(3.14)左端的积分的差异)

【例 3.15】　计算积分 $\oint\limits_{|z-\mathrm{i}|=6}\dfrac{\cos z}{(z-\mathrm{i})^3}\mathrm{d}z$.

解　首先，识别积分的类型．它是具有式(3.14)左端积分的特征的那类积分．

其次，将所求积分与式(3.14)左端的积分比较后，知道所求积分在形式上与式(3.14)左端的积分相同．由此想到用式(3.14)计算积分．

最后，经验证，所求积分满足定理 3.5 的条件，由式(3.14)得

$$\oint\limits_{|z-\mathrm{i}|=6}\frac{\cos z}{(z-\mathrm{i})^3}\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\left[(\cos z)''\right]_{z=\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{2}\pi\mathrm{i}$$

【例 3.16】　计算积分 $\oint\limits_{|z|=8}\dfrac{1}{z^3(z+1)(z-1)}\mathrm{d}z$.

解　首先，识别积分类型，由于被积函数在积分路径内部含有三个奇点 $z=0$，$z=1,z=-1$，所以，可用“挖奇点”法来计算．

其次，为用“挖奇点”法，作 $C_1:|z|=\dfrac{1}{4},C_2:|z-1|=\dfrac{1}{4},C_3:|z+1|=\dfrac{1}{4}$，经验证，可由定理 3.4 得

$$\begin{aligned}&\oint\limits_{|z|=8}\frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}\mathrm{d}z\\&=\oint\limits_{C_1}\frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}\mathrm{d}z+\oint\limits_{C_2}\frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}\mathrm{d}z+\oint\limits_{C_3}\frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

最后，计算上式右端的三个积分．对这三个积分分别重复例 4.15 的解题步骤，由式(3.14)得

$$\oint\limits_{C_1}\frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}\mathrm{d}z=\oint\limits_{C_1}\frac{\frac{1}{(z+1)(z-1)}}{z^3}\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\left[\left(\frac{1}{z^2-1}\right)''\right]_{z=0}=-2\pi\mathrm{i}$$

由式(3.11)得

$$\oint\limits_{C_2}\frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}\mathrm{d}z=\oint\limits_{C_2}\frac{\frac{1}{z^3(z+1)}}{z-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{z^3(z+1)}\right]_{z=1}=\pi\mathrm{i}$$

$$\oint\limits_{C_3}\frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}\mathrm{d}z=\oint\limits_{C_3}\frac{\frac{1}{z^3(z-1)}}{z+1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{z^3(z-1)}\right]_{z=-1}=\pi\mathrm{i}$$

故得

$$\oint_{|z|=8} \frac{1}{z^3(z+1)(z-1)} \mathrm{d}z = 0$$

由定理 3.6 可推得定理 3.7.

定理 3.7 设 G 是以围线 C 为边界的单连通区域，若 $f(z)$ 在 G 内解析，则 $f^{(n)}(z)$ 在 G 内解析，其中 n 为自然数．

该定理揭示了解析函数的一个深刻性质：解析函数的任意阶导数仍为解析函数．此性质常称为**解析函数的无穷可微性**．

3.4 原函数与不定积分

通过对复变函数沿围线积分的充分讨论，可知解析函数在解析区域内沿曲线段的积分值不依曲线段的形状而改变，仅与曲线的起点和终点有关．比如对例 3.1 $\int_C \mathrm{d}z = b-a = (z)_{z=b}-(z)_{z=a}$ 和例 3.2 $\int_C z\mathrm{d}z = \frac{b^2-a^2}{2} = \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=b} - \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=a}$ 思考后，可以得到下面的结论：

(1)积分只依赖于起点 a 与终点 b，与 C 形状无关．

(2) $\int_C f(z)\mathrm{d}z = F(b)-F(a), \qquad F'(z) = f(z)$.

第一个结论前面已经有理论进行了肯定．对于第二个结论，感觉形式非常熟悉，于是，可以猜想：对解析函数是否也有牛顿-莱布尼茨公式？由于解析函数在解析域内的积分与积分路径的形状无关，借用实积分的记号，将解析函数积分路径的起点 a 放在下限位置、终点 b 放在上限位置，将解析函数 $f(z)$ 在解析域内曲线 C 上的积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 记作 $\int_a^b f(z)\mathrm{d}z$，即

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z)\mathrm{d}z$$

联想高等数学的推理过程，有定理 3.8.

定理 3.8 设 G 为单连通区域，z_0 为 G 内一定点，z 为 G 内一动点，若 $f(z)$ 在 G 内连续，且 $f(z)$ 沿 G 内任一围线的积分为零，则函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

在 G 内解析，且 $F'(z) = f(z)$．

证 设 z_0 为 G 内一定点，z 为 G 内内任意一点(见图 3.8)，只须证 $F'(z) = f(z)$ 即可．即

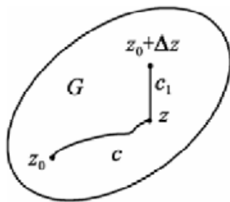


图 3.8

证 $\frac{\Delta F}{\Delta z} \to f(z), (\Delta z \to 0)$

设 $(z+\Delta z)\in G$，用曲线 C 连接 z_0 与 z，用直线段连接 z 与 $z+\Delta z$．

因为 $f(z)$ 在点 z 连续，所以，对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $|\Delta z| = |\zeta - z| < \delta$ 时，有 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$．

于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right| &= \left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]-f(z)\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Delta z}\left[\int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]-f(z)\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\left[f(\zeta)-f(z)\right]\mathrm{d}\zeta\right| < \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z| = \varepsilon\end{aligned}$$

即对 G 中任意一点 z 有

$$\frac{\Delta F}{\Delta z}\to f(z),(\Delta z\to 0)$$

也即 $F'(z)=f(z)$，从而 $F(z)$ 在 G 内解析.

定理 3.8 提供了由 $f(z)$ 构造解析函数的方法，同时它又提供了一种表示解析函数 $F(z)$ 的途径.

称在区域 G 内满足条件

$$F'(z)=f(z)$$

的 $F(z)$ 为 $f(z)$（在 G 内）的一个**原函数**，称 $f(z)$ 的原函数的全体为 $f(z)$ 的**不定积分**.

基于定理 3.8，仿高等数学可推得定理 3.9.

定理 3.9　设 G 为单连通区域，$z_0,z_1\in G$，若 $f(z)$ 在 G 内解析，$F(z)$ 为 $f(z)$ 在 G 内的一个原函数，则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = F(z_1)-F(z_0) \tag{3.15}$$

称式(3.15)为**牛顿-莱布尼茨公式**.

【例 3.17】　计算积分 $\int_{\mathrm{i}}^{1} 2z\mathrm{d}z$.

解　由式(3.15)得

$$\int_{\mathrm{i}}^{1} 2z\mathrm{d}z = (z^2)_{z=1}-(z^2)_{z=\mathrm{i}} = 2$$

【例 3.18】　计算积分 $\int_{0}^{\mathrm{i}} \cos z\mathrm{d}z$.

解　由式(3.15)得

$$\int_{0}^{\mathrm{i}} \cos z\mathrm{d}z = (\sin z)_{z=\mathrm{i}}-(\sin z)_{z=1} = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-\mathrm{e})$$

最后给出定理 3.2 的逆命题.

定理 3.10　设 $f(z)$ 在单连通区域 G 内连续，C 为 G 内任意一条围线，若

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

则 $f(z)$ 在 G 内解析.

证　由定理 3.8，若令

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

其中 z_0 为 G 内一定点，z 为 G 内一动点，则

$$f(z) = F'(z), \qquad z \in G$$

故 $f(z)$ 在 G 内解析.

人们常称定理 3.10 为**莫瑞拉定理**. 它不仅给出了一个函数为解析函数的充分条件，而且它与定理 3.2 一起可得解析函数的又一等价定义.

3.5　习　　题

1．沿下列路线计算积分 $\int_0^{1+\mathrm{i}}\left[(x-y)+\mathrm{i}x^2\right]\mathrm{d}z$.

(1)从原点到 $1+\mathrm{i}$ 的直线段；

(2)从原点沿实轴到 1，再由 1 沿直线向上至 $1+\mathrm{i}$ ；

(3)从原点沿虚轴到 i，再由 i 沿水平方向至 $1+\mathrm{i}$.

2．计算积分 $\int_C (x^2+\mathrm{i}y)\mathrm{d}z$ ，其中 C 为：

(1)从原点沿直线 $y=x$ 到 $1+\mathrm{i}$ ；

(2)从原点沿抛物线 $y=x^2$ 到 $1+\mathrm{i}$ ；

(3)从原点沿抛物线 $y^2=x$ 到 $1+\mathrm{i}$.

3．计算积分 $\oint_C |z|\bar{z}\mathrm{d}z$ ，其中 C 为一条闭路，由直线段 $-1\leqslant x\leqslant 1, y=0$ 与上半单位圆周组成.

4．设 $f(z)$ 是在单连通区域 D 上的解析函数，C 是 D 内的任意一条光滑的约当曲线，问

$$\oint_C \mathrm{Re}\left[f(z)\right]\mathrm{d}z = 0\text{，}\oint_C \mathrm{Im}\left[f(z)\right]\mathrm{d}z = 0$$

是否一定成立，为什么？

5．计算积分 $\oint_C \dfrac{\bar{z}}{|z|}\mathrm{d}z$ 的值，其中 C 为正向圆周：$|z|=4$.

6．直接得出下列积分的结果，并说明理由，C 为 $|z|=1$.

(1) $\oint_C \dfrac{3z+5}{z^2+2z+4}\mathrm{d}z$ ；

(2) $\oint_C \frac{e^z}{\cos z} dz$；

(3) $\oint_C \frac{1}{\cos z} dz$；

(4) $\oint_C \frac{1}{z^2+2z+2} dz$；

(5) $\oint_C \frac{1}{z-\frac{1}{2}} dz$；

(6) $\oint_C z\cos z dz$.

7．沿指定曲线的正向计算下列积分.

(1) $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$， $C:|z-2|=1$；

(2) $\oint_C \frac{1}{z^2-a^2} dz$， $C:|z-a|=a, a>0$；

(3) $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$， $C:|z-2i|=\frac{3}{2}$；

(4) $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^3-1)} dz$， $C:|z|=r<1$；

(5) $\oint_C \frac{\sin z}{z} dz$， $C:|z|=1$；

(6) $\oint_C \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2} dz$， $C:|z|=2$；

(7) $\oint_C \frac{e^z}{z^5} dz$， $C:|z|=1$；

(8) $\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3} dz$，其中 a 为 $|a|\neq 1$ 的任意复数， $C:|z|=1$；

(9) $\oint_C \frac{e^{-z}\sin z}{z^2} dz$， $C:|z-i|=2$；

(10) $\oint_C \frac{3z+2}{z^4-1} dz$， $C:|z-(1+i)|=\sqrt{2}$.

8．设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在单连通区域 D 内处处解析，C 为 D 的边界，$f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在 C 上连续，且在 C 是 $f_1(z)=f_2(z)$，试证在 $\overline{D}$ 上 $f_1(z)=f_2(z)$.

9．证明：$u = x^2 - y^2$ 和 $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ 都是调和函数，但是 $u + \mathrm{i}v$ 不是解析函数．

10．用柯西积分公式计算函数 $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z}$ 沿正向圆周 $|z| = 1$ 的积分值．然后利用 $|z| = 1$ 的参数方程 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$，证明：

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos\theta} \cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \pi$$

11．设 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 都是区域 D 内的调和函数，试证函数 $f(z) = (u_y - v_x) + \mathrm{i}(u_x + v_y)$ 在 D 内解析．

12．设 $u = u(x, y)$ 是区域 D 内的调和函数，试证函数 $f(z) = u_x - \mathrm{i}u_y$ 在 D 内解析．

13．由下面所给调和函数求解析函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$．

(1) $v(x, y) = 2xy, f(\mathrm{i}) = -1$；

(2) $u(x, y) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y), f(0) = 0$；

(3) $u(x, y) = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2), f(0) = 0$；

(4) $v(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}, f(2) = 0$；

(5) $v(x, y) = \arctan\dfrac{y}{x}, x > 0$．

第 4 章　级　　数

教学提示： 级数与数列有着密切的关系.在复数范围内，级数与数列的关系和在实数范围十分类似，关于复数项级数和复变函数项级数的某些概念和结论都是实数范围内相应内容的直接复制或者推广.在教学中注意结合过去的知识在复习、对比中进行，会有事半功倍的效果.把解析函数表示为级数不仅有理论上的意义，而且也有实用的意义.

教学目标： 通过本章的学习，使学生了解复数项级数的敛散性及有关概念、主要性质及重要定理；了解幂级数收敛的阿贝尔定理以及幂级数收敛圆的概念，掌握简单的幂级数收敛半径的求法.掌握幂级数在收敛圆内一些基本性质.了解泰勒定理.记住几个主要的初等函数的泰勒展开式，能熟练地把一些比较简单的初等函数展开成泰勒级数；了解罗朗定理及孤立奇点的分类.掌握将简单的函数在其孤立奇点附近展开为罗朗级数的间接法.

4.1　复级数的基本概念

4.1.1　复数项级数

设$\{z_n\}$（$n=1,2,\cdots$）为一复数序列，称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{4.1}$$

为复数项无穷级数.如果它的部分和序列

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \ (n=1,2,\cdots)$$

的极限$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$存在($S$为有限数)，则称级数(4.1)是**收敛**的，$S$称为级数的**和**；如果序列$\{S_n\}$不收敛，则称级数(4.1)是**发散**的.

由复数列收敛的充分必要条件，可以得到如下结果(证明从略).

定理 4.1　设$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$（$n=1,2,\cdots$），则级数(4.1)收敛的充要条件是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$都收敛.

这个定理将复数项级数的收敛问题转化为实数项级数的收敛问题，而由实数项级数收敛的必要条件，很容易地得到复数项级数收敛的必要条件.

定理 4.2　级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$收敛的必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

定理 4.3 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$也收敛并且有$\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$成立.

证 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{x_n^2+y_n^2}$，而$|x_n| \leqslant \sqrt{x_n^2+y_n^2}$，$|y_n| \leqslant \sqrt{x_n^2+y_n^2}$.

根据正项级数的比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|y_n|$都收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$也都收敛.于是由定理 4.1 知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$是收敛的.

由对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$的部分和成立的不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

可以得出$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$，即$\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$.

如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$收敛，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ **绝对收敛**. 非绝对收敛的收敛级数称为**条件收敛**. 这里顺便指出，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$是正项级数，其收敛性可以用正项级数的相关定理来进行判别. 另外，由定理 4.3 的证明过程，还可以得到级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$收敛的一个充分必要要件是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$都绝对收敛.

4.1.2 复变函数项级数

设$\{f_n(z)\}(n=1,2,\cdots)$为区域D内的函数，则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z) = f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots \tag{4.2}$$

为区域D内的复变函数项级数.该级数的前n项和

$$S_n(z) = f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)\ (n=1,2,\cdots)$$

称为这个级数的**部分和**.

如果对于区域D内的某一点z_0. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z_0)=S(z_0)$存在，则称级数(4.2)**在$z_0$点收敛**，称$S(z_0)$为它的**和**. 如果级数在$D$内处处收敛，那么它的和一定是与$z$有关的一个函数$S(z)$：

$$S(z) = f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

这个函数称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$的**和函数**.

关于复数项级数与复变函数项级数，由于这两类级数的有关定义、性质与判别法与高等数学的相应部分极为相似，所以，不再赘述．下面再简单介绍一下“一致收敛”和“内闭一致收敛”概念．

若任给 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，对任何 $z\in D$，当 $n>N$ 时就有 $\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(z)-f(z)\right|<\varepsilon$ 成立，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 D 内一致收敛于 $f(z)$，也称 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 D 内**一致收敛**．

关于一致收敛，不加证明地给出下列判别方法，感兴趣的读者可查阅本书后的参考文献．

定理 4.4　若有收敛的正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}M_n$，且对任何 $z\in D$ 有 $|f_n(z)|\leqslant M_n$ ($n=1,2,\cdots$)，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 必在 $z=\infty$ 上一致收敛．

设函数 $f_n(z)$ ($n=1,2,\cdots$)定义在区域 G 内，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 G 内任意一个有界闭集上均一致收敛，则称该级数在区域 G 内**内闭一致收敛**．

【例 4.1】　级数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 在 $|z|<1$ 时收敛，在 $|z|\leqslant r(<1)$ 上一致收敛，其和为 $\dfrac{1}{1-z}$．

证　因为 $S_n=1+z+z^2+\cdots+z_{n-1}=\dfrac{1-z^n}{z-1}$，又当 $|z|<1$ 时，$z^n\to 0(n\to\infty)$，故 $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{1-z}$，即级数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\dfrac{1}{1-z}$，这就证明了级数的和为 $\dfrac{1}{1-z}$．

由于 $|z|\leqslant r(<1)$，由部分和知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}r^n$ 收敛，又因为对闭圆 $|z|\leqslant r(<1)$ 上的一切点 z 显然有 $|z^n|\leqslant r^n$ ($n=1,2,\cdots$)，因此有一致收敛的判别法知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 在 $|z|\leqslant r(<1)$ 上一致收敛．

【例 4.2】　试证级数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 在单位圆内内闭一致收敛．

证　设 D 为单位圆内的任一闭集．显然，D 是有界的．对于 D，定可在单位圆内找到某个闭圆：$|z|\leqslant r(<1)$，使 D 含于该闭圆中．由例 4.1 得知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 在该闭圆上是一致收敛的．

由 D 在单位圆内的任意性，证得级数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 在单位圆内内闭一致收敛．

最后不加证明地给出和函数的一个性质．

定理 4.5　设 D 为区域，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 的各项在 D 内解析，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 D 内内闭一致收敛于 $f(z)$，则

(1) $f(z)$ 在 D 内解析．

(2) $f^{(p)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(p)}(z), p=1,2,\cdots$.

4.2 幂 级 数

4.2.1　幂级数的概念

定义 4.1　称形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots \tag{4.3}$$

或

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots \tag{4.4}$$

的级数为**幂级数**，其中 $z_0,c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$ 均为复常数．

由于形如式(4.3)与式(4.4)的级数之间可相互转化，所以，为简单起见，只讨论形如式(4.3)的级数．

对于级数，首先关心的自然是收敛范围的问题．而对式(4.3)，易知，它在点 $z=0$ 是收敛的．为弄清它的收敛范围，作如下讨论．

4.2.2　幂级数的收敛圆

定理 4.6　若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在点 $a\,(\neq 0)$收敛，则它在圆 $K:|z|<|a|$ 内绝对收敛，在闭圆 $K_1:|z|\leqslant\rho(\rho<|a|)$ 上一致收敛．

证　首先，证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在圆 $K:|z|<|a|$ 内绝对收敛．

设点 z 为圆 $K:|z|<|a|$ 内任意一点，因 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 收敛，所以，一定存在正数 M，使得

$$|c_na^n|\leqslant M, n=0,1,2,\cdots$$

于是

$$|c_nz^n|=\left|c_na^n\left(\frac{z}{a}\right)^n\right|\leqslant M\left|\frac{z}{a}\right|^n$$

由 $|z|<|a|$ 得知级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{z}{a}\right|^n$$

收敛，故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛．由 z 在 $K:|z|<|a|$ 内的任意性，证得级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在圆 K 内绝对收敛．

其次，证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在闭圆 $K_1:|z|\leqslant \rho(\rho<|a|)$ 上一致收敛．

由于对闭圆 $K_1:|z|\leqslant \rho(\rho<|a|)$ 上的一切点 z 均有

$$|c_n z^n| \leqslant |c_n| \rho^n$$

而适合 $\rho<|a|$ 的 ρ 总可表成 $\rho<|z_1|$，z_1 为圆 $K:|z|<|a|$ 中的某一点，由前面已证得级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在点 z_1 绝对收敛，即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ 收敛，从而，得知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \rho^n$ 收敛．于是，由定理 4.4 得知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在闭圆 $K_1:|z|\leqslant \rho(\rho<|a|)$ 上一致收敛．

综上所述，定理得证．

推论　若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在点 $b\,(\neq 0)$发散，则它在 $|z|>b$ 时发散．

定理 4.6 称为**阿贝尔(Abel)定理**．有了阿贝尔定理及其推论便可弄清级数(4.3)的收敛范围．

首先，级数(4.3)在点 $z=0$ 是收敛的．

其次，级数(4.3)在 $z\neq 0$ 时只有三种可能：

(1)级数(4.3)在所有的点 $z\neq 0$ 收敛(如$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$)；

(2)级数(4.3)在所有的点 $z\neq 0$ 发散(如$1+2z+2^2z^2+\cdots+2^n z^n+\cdots$)；

(3)级数(4.3)在有的点 $z\neq 0$ 收敛，同时又在有的点 $z\neq 0$ 发散．此时，一定存在一点 $a\neq 0$，使级数(4.3)在点 a 收敛，同时，也一定存在一点 $b\neq 0$，使级数(4.3)在点 b 发散．

对于(3)，可以证明：存在一个以原点为圆心，以 R 为半径的圆，使级数(4.3)在该圆内收敛(且绝对收敛)，在该圆外发散．

若将该圆的圆周记作 $C_R:|z|=R$，则为了统一起见，对于(1)，规定 $R=+\infty$ (级数(4.3)在复平面收敛)，对于(2)，规定 $R=0$ (级数(4.3)仅在一点 $z=0$ 收敛)．

总之，对于级数(4.3)，总存在圆周 $C_R:|z|=R$，使得级数(4.3)在 C_R 的内部绝对收敛，在 C_R 的外部发散．称圆 $N(0,R):|z|<R$ 为级数(4.3)的**收敛圆**，称 R 为级数(4.3)的**收敛半径**．

求收敛半径的方法与高等数学中的方法一样．

定理 4.7　对于级数(4.3)，若极限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

存在(有限或无限)，则极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$$

存在，并且有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda=\frac{1}{R}$$

其中的 R 为级数(4.3)的收敛半径．当 $\lambda=0$ 时，规定 $R=+\infty$，当 $\lambda=+\infty$ 时，规定 $R=0$．例如，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$，$\sum_{n=0}^{\infty}n!z^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的 R 分别为 $1,0,+\infty$．

由以上讨论知道，对于级数(4.3)，总有一个收敛圆存在，使得该级数在此圆内收敛．其和函数在收敛圆内是否解析呢？

4.2.3　和函数的解析性

关于幂级数(4.4)，不加证明地给出其性质如下：

定理 4.8　设 $K:|z-z_0|<R(0<R<+\infty)$ 为幂级数(4.4)的收敛圆，若函数 $f(z)$ 为幂级数(4.4)的和函数，则

(1)函数 $f(z)$ 在 K 内解析．

(2)幂级数(4.4)在 K 内可逐项求导任意次，即

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(c_n(z-z_0)^n)^{(k)}，\quad k=1,2,\cdots$$

(3)幂级数(4.4)可以在 K 内任一曲线 C 上逐项积分，即

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_C(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z \text{ 或} \int_{z_0}^{z}f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$$

4.3　泰 勒 级 数

对于幂级数(4.3)与级数(4.4)，只要其收敛半径不为零，其和函数在其收敛圆内为一解析函数．此时，读者自然会问：一个解析函数是否一定可以表示成幂级数？本节就来讨论这个问题．

4.3.1　泰勒定理

定理 4.9　设为 G 区域，点 $a\in G$，圆 $K:|z-a|<R$ 含于 G (图 4.1)，若函数 $f(z)$ 在 G 内解析，则在 K 内有

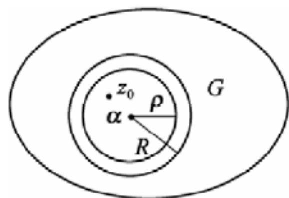


图 4.1

$$f(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{4.5}$$

其中，

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},n=0,1,2,\cdots \tag{4.6}$$

且上述展式是唯一的．

证　设 z_0 为 K 内任意一点，作 $c_\rho: |z-a| = \rho(0<\rho<R)$ 使 z_0 含于 c_ρ 的内部．由柯西积分公式有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z$$

由于当 $z \in c_\rho$ 时有 $\left|\dfrac{z_0 - a}{z - a}\right| < 1$，所以

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z - a - (z_0 - a)} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \dfrac{z_0 - a}{z - a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0 - a)^n}{(z - a)^{n+1}} \tag{4.7}$$

该式右端是一无穷等比级数，其一般项的模是

$$\left|\frac{(z_0 - a)^n}{(z-a)^{n+1}}\right| = \frac{1}{\rho} q^n$$

由于 $q = \left|\dfrac{(z_0 - a)}{(z - a)}\right| < 1$，所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\rho} q^n$ 收敛．由一致收敛判别法可知，级数(4.7)在 c_ρ 上一致收敛．用 $\dfrac{f(z)}{2\pi \mathrm{i}}$ 乘式(4.7)两端，则右端的级数仍在 c_ρ 上一致收敛，并且知道它的各项在 c_ρ 上连续，由定理 4.5 知它可在 c_ρ 上逐项积分，于是有

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0 - a)^n}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(z_0 - a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0 - a)^n \end{aligned}$$

其中，$c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0, 1, 2, \cdots$

由点 z_0 在 K 内的任意性，定理的前一部分得证．

再证定理的后一部分．设另有展式 $f(z) = c'_n (z-a)^n$，其中 $z \in K$．由定理 4.8 知

$$c'_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

故 $c'_n = c_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$，从而证得 $f(z)$ 在 K 内的展式是唯一的．

综上所述，定理得证．

定理 4.9 称为**泰勒**(Taylor)**定理**，被式(4.6)确定的式(4.5)的右端称为函数 $f(z)$ 在点 a 的**泰勒级数**，其中的 $c_n(n=0,1,2,\cdots)$ 称为 $f(z)$ 的**泰勒系数**.

泰勒定理的重要性在于它圆满地解决了以下两个问题：

(1)解决了将解析函数展成幂级数的三个基本理论问题：一是在何处可展，二是怎么展，三是展式是否唯一.

(2)解决了解析函数与幂级数是否等价的问题. 泰勒定理与定理 4.8 一起可得解析函数的又一等价条件：函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析的充分必要条件是，$f(z)$ 在 G 内任意一点 a 的某个邻域内可展成幂级数为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$，$c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}, n=0,1,2,\cdots$.

幂级数的收敛半径与幂级数的和函数有无联系呢？定理 4.10 对此作了回答.

定理 4.10 若函数 $f(z)$ 在点 a 解析，点 b 是 $f(z)$ 的奇点中离点 a 最近的奇点，则使 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 成立的收敛圆的半径为 $R=|a-b|$.

4.3.2 解析函数表成幂级数的例子

约定：“求 $f(z)$ 在点 a 的泰勒级数”、“将 $f(z)$ 在点 a 展成泰勒级数”、“将 $f(z)$ 在点 a 展成幂级数”均指在圆 $|z-a|<R$ 内将 $f(z)$ 表示成式(4.5)(系数被式(4.6)确定), 这里的 R 总是取 $R=|a-b|$ (b 是 $f(z)$ 的奇点中离点 a 最近的奇点).

【例 4.3】 初等函数的幂级数展开——指数函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$.

解 因为对任何 n 有 $f^{(n)}(z)=\mathrm{e}^z$

所以 $f^{(n)}(0)=\mathrm{e}^0=1$

故

$$f(z)=\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, |z|<+\infty$$

【例 4.4】 初等函数的幂级数展开——三角函数 $\cos z$ 与 $\sin z$.

解 利用 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 的展开式可得

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!}\right)$$

右端两个级数的奇次项相加时抵消, 故有

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, |z|<+\infty$$

应用同样的办法可得

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, |z|<+\infty$$

【例 4.5】　求 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在点 $z=0$ 的泰勒展式.

解　因为函数 $f(z)$ 的奇点为 $\pm i$，距点 $z=0$ 的距离(最近)等于 1，所以 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在点 $z=0$ 的泰勒展式收敛半径为 1.

直接利用当 $|z|<1$ 时 $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$，立即得到

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-\cdots+(-1)^n z^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\quad,|z|<1. \qquad ①$$

注：对于实函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$，当 $|x|<1$ 时有

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)x^{2n} \qquad ②$$

函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在实轴 $(-\infty,+\infty)$ 上是处处有确定的值的，且是处处可微的．然而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)x^{2n}$ 只在 $(-1,1)$ 上才与 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 一致，当 $|x|\geqslant 1$ 时等式②就失去意义了．为什么一个在整个数轴上处处可微的函数，其泰勒展式的收敛半径却只等于 1 呢？当将等式②放在复数范围来考虑时，就变成等式①的形式了，其中 z 是复数．如果 $\dfrac{1}{1+z^2}$ 在整个复平面上解析，则可知其收敛半径应等于 ∞．然而 $\dfrac{1}{1+z^2}$ 并是在整个复平面上解析的，它有奇点 $\pm i$，因而它在原点 $z=0$ 的展式的收敛半径应等于 1，而等式(1)的右端级数的收敛半径的确是 1．两者一致性在复数领域才完全清楚了.

【例 4.6】　求 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 在 $z=0$ 的邻域内的泰勒展式，并确定收敛半径.

解　因为 $\dfrac{1}{(1+z)^2}=-\left(\dfrac{1}{1+z}\right)'$

又

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^n z^n+\cdots$$

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)'=0-1+2z-3z^2+\cdots+(-1)^{n-1}nz^{n-1}+\cdots$$

所以

$$\frac{1}{(1+z)^2}=1-2z+3z^2-\cdots+(-1)^n nz^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1}$$

因 $z=-1$ 为 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点,又 -1 与 0 的距离为 1，故收敛半径为 1.

【例 4.7】 求 $e^z\cos z$ 在 $z=0$ 的邻域内的幂级数展式，并确定其收敛半径.

解 因 $e^z\cos z$ 在整个复平面解析，故其幂级数展式的收敛半径为 ∞ .

本来可以分别写出 e^z 和 $\cos z$ 的幂级数展式，然后算出两个幂级数的柯西乘积，即得 $e^z\cos z$ 的泰勒展式.但采用另一方法求解.

因为 $e^z(\cos z+i\sin z)=e^{z+iz}=e^{(1+i)z}=e^{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z}$

所以 $e^z(\cos z+i\sin z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}}{n!}z^n$

同样可得

$$e^z(\cos z-i\sin z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}}{n!}z^n$$

注意到 $e^{i\frac{n\pi}{4}}+e^{-i\frac{n\pi}{4}}=2\cos\dfrac{n\pi}{4}$ ，便可由以上两等式得

$$e^z\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\dfrac{n\pi}{4}}{n!}z^n$$

亦得

$$e^z\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n!}z^n$$

【例 4.8】 求对数函数 $w=\mathrm{Ln}(1+z)$ 的主值 $w=\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展式.

解 $w=\ln(1+z)$ 在从 $z=-1$ 向左沿负实轴剪开的复平面内是解析的，而 $z=-1$ 是它距离 $z=0$ 最近的奇点，所以它在 $|z|<1$ 内可以展开成 z 的幂级数. 因为

$$\left[\ln(1+z)\right]'=\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots,\quad |z|<1$$

在单位圆内任取一条从 0 到 z 的积分曲线 C ，对上式两端逐项积分，有

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}+\cdots,\quad |z|<1$$

或写成

$$\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1},\qquad |z|<1$$

上面的一些例子给出了将 $f(z)$ 在点 a 展成幂级数的基本方法，把一个复变函数展成幂级数的方法与实变函数的情形基本一致，其中，利用展式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,|z|<1$$

的展开方法要给予特别的关注，希望读者通过练习，掌握展开的基本方法和技巧.

【例 4.9】　试将 $f(z)=\dfrac{z}{z+2}$ 在点 $z=1$ 展成泰勒级数.

解　因为 $z=-2$ 是 $f(z)$ 的唯一有限奇点，所以，$f(z)$ 可在 $|z-1|<|1-(-2)|=3$ 内展成泰勒级数，有

$$\begin{aligned}\frac{z}{z+2}&=\frac{z-1+1}{z-1+3}=\frac{z-1}{(z-1)+3}+\frac{1}{(z-1)+3}\\&=\frac{z-1}{3\left(1+\frac{z-1}{3}\right)}+\frac{1}{3\left(1+\frac{z-1}{3}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{n+1}}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{3^{n+1}}\\&=\frac{1}{3}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{3^{n+1}},|z-1|<3\end{aligned}$$

4.4　双边幂级数

对于函数 $f(z)=\dfrac{1}{z-z^2}$，在点 $z=0$ 的邻域内不解析，因为，在点 $z=0$ 的邻域内含有 $f(z)$ 的奇点 $z=0$．因此，在点 $z=0$ 的邻域内不能表成幂级数．虽然如此，但可设法将它表示成其他形式的函数项级数．不难推得：

当 $0<|z|<1$ 时，有

$$f(z)=\frac{1}{z-z^2}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

当 $0<|z-1|<1$ 时，有

$$f(z)=\frac{1}{z-z^2}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-[-(z-1)]}-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(z)^n(z-1)^n-\frac{1}{z-1}$$

以上两个级数是既含正幂项又含负幂项的级数.

另外，不难知道，$f(z)$ 在点 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<1$ 与 $0<|z-1|<1$ 内是解析的.

至此，可提出下列两个问题来研究：

(1)既含正幂项又含负幂项的级数有什么性质？

(2)在去心邻域 $0<|z-a|<R$ 内解析的函数与既含正幂项又含负幂项的级数有无必然联系？

4.4.1　双边幂级数的概念

定义 4.2　称级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-a)^n=\cdots+\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-a}+C_0+C_1(z-a)+\cdots+C_n(z-a)^n+\cdots \tag{4.8}$$

为**双边幂级数**，其中 a 与 $C_n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为复常数，称 $C_n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为双边幂级数(4.8)的系数.

级数(4.8)是由 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ (4.9)与 $\sum_{n=-\infty}^{1}C_n(z-a)^n$ (4.10)组成．若对某点 z，级数(4.9)与(4.10)同时收敛，且分别收敛于 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$，则称级数(4.8)在点 z 收敛，且称 $f_1(z)+f_2(z)$ **为它的和**．若对集 E 中的任意一点，级数(4.9)与级数(4.10)都同时收敛，则称级数(4.8)在集 E 上收敛．仿此，可定义级数(4.8)在集 E 上绝对收敛和一致收敛的概念.

依次称级数(4.9)与级数(4.10)为级数(4.8)的**解析部分**与**主要部分**(或**奇异部分**).

4.4.2　双边幂级数的收敛域及其和函数的解析性

显然，级数(4.8)的收敛域应由级数(4.9)与级数(4.10)的收敛域的公共部分构成.

对于级数(4.9)，其收敛域为圆 $|z-a|<R$ ($0<R<+\infty$)，它在 $|z-a|<R$ 内绝对收敛，在 $|z-a|<R'(R'<R)$ 上一致收敛，它在 $|z-a|<R$ 内定义一个解析函数 $f_1(z)$.

对于级数(4.10)，令

$$\varsigma=\frac{1}{z-a}$$

并令 $C_{-n}=b_n$，于是，级数(4.10)变形为

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\varsigma^n=b_1\varsigma+b_2\varsigma^2+\cdots+b_n\varsigma^n+\cdots$$

此级数的收敛域是圆 $|\varsigma|<\frac{1}{r}$ $\left(0<\frac{1}{r}\leqslant+\infty\right)$，且它在 $|\varsigma|<\frac{1}{r}$ 内绝对收敛，在 $|\varsigma|\leqslant\frac{1}{r'}\left(\frac{1}{r'}<\frac{1}{r}\right)$ 上一致收敛.

换成原来的变量 z，则级数(4.10)在 $|z-a|>r$ ($0<r<+\infty$) 内绝对收敛，在 $|z-a|\geqslant r'$，$r'>r$ 上一致收敛，并在 $|z-a|>r$ 内定义一个解析函数 $f_2(z)$.

因此，若 $R\leqslant r$，则级数(4.8)在复平面无处收敛；当且仅当 $R>r$ 时，级数(4.8)的收敛域为

$$r<|z-a|<R$$

且知它在该圆环内绝对收敛，在闭圆环 $r<r'\leqslant|z-a|\leqslant R'<R$ 上一致收敛.

级数(4.8)在圆环 $r<|z-a|<R$ 内代表一个解析函数 $f(z)$，且有 $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$.

若级数(4.8)在圆环 $r<|z-a|<R$ 内收敛，则称此圆环为级数(4.8)的**收敛圆环**.

类似幂级数，双边幂级数有如下定理(证明从略)：

定理 4.11　若级数(4.8)的收敛圆环为 $r<|z-a|<R$ ($0\leqslant r<R\leqslant+\infty$)，则级数(4.8)在 G 内绝对收敛，且在 G 内每个较小的同心闭圆环 $G':r'\leqslant|z-a|\leqslant R'(r<r'<R'<R)$ 上一致收敛，其和函数在 G 内为解析函数，并且可以逐项求积和逐项求导.

4.5 罗 朗 级 数

由定理 4.11 可知，级数(4.8)在其收敛圆环内确定一个解析函数．反之，一个在圆环内解析的函数能否表成形如(4.8)的级数呢？

4.5.1 罗朗定理

定理 4.12　若函数 $f(z)$ 在圆环 G ：$r<|z-a|<R$（$0\leqslant r<R\leqslant+\infty$）内解析，则 $f(z)$ 在 G 内可展成双边幂级数为

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n=\cdots+\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-a}+C_0+C_1(z-a)+\cdots+C_n(z-a)^n+\cdots \quad (4.11)$$

其中

$$C_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_c \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-a)^{n+1}}\mathrm{d}\varsigma,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \quad (4.12)$$

这里的 C 为圆周 $|\varsigma-a|=\rho(r<\rho<R)$，并且系数 C_n 被 $f(z)$ 及圆环 G 唯一确定．

该定理的证明思路与泰勒定理的证明思路相同，这里从略．

定理 4.12 称为**罗朗定理**，被式(4.12)确定的式(4.11)的右端称为 $f(z)$ 在点 a 的**罗朗级数**，由式(4.12)确定的 C_n 称为**罗朗系数**．

罗朗定理的重要意义在于它回答了将函数展成罗朗级数的三个基本问题：一是回答了在何处可展的问题，二是回答了怎么展的问题，三是回答了展式是否唯一的问题．

由定理 4.11 与定理 4.11 可知：在圆环 $r<|z-a|<R(0\leqslant r<R\leqslant+\infty)$ 内的解析函数与它在点 a 的罗朗级数是等价的．

4.5.2 函数展成罗朗级数的例子

将函数 $f(z)$ 展成罗朗级数，通常有两种给出问题的方式：

(1)已知函数 $f(z)$ 及圆环 $r<|z-a|<R$ ，求将 $f(z)$ 在该圆环内展成罗朗级数．

(2)已知函数 $f(z)$ 及点 a ，求将 $f(z)$ 在点 a 的去心邻域内展成罗朗级数．此时也说成“将 $f(z)$ 在点 a 展成罗朗级数”．

关于(1)，首先，需验证 $f(z)$ 在圆环 $r<|z-a|<R$ 内解析．其次，再设法展开．

关于(2)，首先，需确定使 $f(z)$ 在其中解析的点 a 的去心邻域 $0<|z-a|<R$ ，即确定 R ．此时，总是取使 $f(z)$ 在其中解析的最大的去心邻域．为此，只须取 $R=|a-b|$ 即可，这里的 b $(\neq 0)$ 是函数 $f(z)$ 的离 a 最近的奇点．

【例 4.10】　试将 $f(z)=(z^2-3z+2)^{-1}$ 在圆环 $1<|z|<2$ 内展成罗朗级数．

解　首先，知道 $f(z)$ 在圆环 $1<|z|<2$ 内解析，所以，$f(z)$ 在该圆环内可展成罗朗级数，且展式是唯一的．

其次，利用展式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\quad |z|<1$$

将 $f(z)$ 展成罗朗级数．由 $1<|z|<2$ 得 $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ 及 $\left|\frac{z}{2}\right|<1$

故

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\\&=-\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}，\ 1<|z|<2．\end{aligned}$$

【例 4.11】　试将 $f(z)=(z^2-3z+2)^{-1}$ 在点 $z=2$ 的去心邻域内展成罗朗级数．

解　首先，确定使 $f(z)$ 在其中解析的点 $z=2$ 的最大去心邻域．因 $f(z)$ 的有限奇点只有 1 与 2，所以，使 $f(z)$ 在其中解析的点 $z=2$ 的最大去心邻域为 $0<|z-2|<1$．

其次，利用展式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\quad |z|<1$$

将 $f(z)$ 展成罗朗级数，有

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1-[-(z-2)]}\\&=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\\&=\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n,\ 0<|z-2|<1\end{aligned}$$

【例 4.12】　试将 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 在点 $z=0$ 的去心邻域内展成罗朗级数．

解　首先，确定使 $f(z)$ 在其中解析的点 $z=0$ 的最大去心邻域为 $0<|z|<+\infty$．
其次，将 $f(z)$ 展成罗朗级数，有

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!},\ 0<|z|<+\infty．\end{aligned}$$

【例 4.13】　计算 $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$

解　$\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz \overset{0<|z|<+\infty}{=} \oint_{|z|=1} \left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots\right) dz$

$\overset{积分路径在0<|z|<+\infty中可逐项积分}{=} \oint_{|z|=1} dz + \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz + \cdots + \oint_{|z|=1} \frac{1}{n!z^n} dz \cdots = 2\pi i$

【例 4.14】　计算 $\oint_{|z|=2} \sin\frac{2}{z}$.

解　$\oint_{|z|=2} \sin\frac{2}{z} = \oint_{|z|=2} \left(\frac{2}{z}+\frac{2^3}{3!z^3}+\cdots+\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!z^{2n+1}}+\cdots\right) dz$

$= 4\pi i$

4.6　解析函数在孤立奇点的性质

4.6.1　复平面上孤立奇点及其分类

定义 4.3　设点 a 为函数 $f(z)$ 的奇点，若 $f(z)$ 在点 a 的某个去心邻域 $0<|z-a|<R$ 内解析，则称点 a 为函数 $f(z)$ 的**孤立奇点**.

依定义，点 $z=0$ 为函数 $\frac{\sin z}{z}$ 与 $\frac{e^z}{z^2}$ 的孤立奇点，点 $z=1$ 为函数 $\sin\frac{z}{1-z}$ 的孤立奇点.

定义 4.4　设点 a 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点：

(1)若 $f(z)$ 在点 a 的罗朗级数的主要部分为零，则称点 a 为 $f(z)$ 的**可去奇点**；

(2)若 $f(z)$ 在点 a 的罗朗级数的主要部分有有限多项，设为

$$\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{C_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-a}, \qquad C_{-m}\neq 0$$

则称点 a 为 $f(z)$ 的 m **级(阶)极点**；

(3)若 $f(z)$ 在点 a 的罗朗级数的主要部分有无限多项，则称点 a 为 $f(z)$ 的**本性奇点**.

依定义，点 $z=0$ 为 $\frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点，点 $z=0$ 为 $\frac{e^z}{z^2}$ 的二级极点，点 $z=1$ 为 $\sin\frac{z}{1-z}$ 的本性奇点.

4.6.2　函数在孤立奇点的去心邻域内的性质

1. 函数在可去奇点的去心邻域内的性质

定理 4.13　若点 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列三个条件是等价的：

(1)点 a 为 $f(z)$ 的可去奇点；

(2) $\lim_{z \to a} f(z) = C(\neq 0)$；

(3)函数 $f(z)$ 在点 a 的某个去心邻域内有界.

证 由(1)推(2)：因为点 a 为 $f(z)$ 的可去奇点，所以，$f(z)$ 的主要部分为零，即

$$f(z) = C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \cdots + C_n(z-a)^n + \cdots, 0 < |z-a| < R$$

于是

$$\lim_{z \to a} f(z) = C_0(\neq 0)$$

故推得(2).

由(2)推(3)：由极限定义即可推得.

由(3)推(1)：只须证 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为零. 由(3)，设 $f(z)$ 在 $0 < |z-a| < R$ 内有界为 $M > 0$，即 $|f(z)| \leqslant M$. 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为

$$\frac{C_{-1}}{z-a} + \frac{C_{-2}}{(z)^2} + \cdots + \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots$$

则由式(4.12)有 $C_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \dfrac{f(\varsigma)}{(\varsigma - a)\mathrm{d}\varsigma}$， $n = -1, -2, \cdots$

其中的 C 为圆周 $|\varsigma - a| = \rho(r < \rho < R)$，于是，有

$$|C_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}$$

所以，当 $n = -1, -2, \cdots$ 时，有

$$\frac{M}{\rho^n} \to 0(\rho \to 0)$$

故 $C_{-1} = C_{-2} = \cdots = C_{-n} = \cdots = 0$，即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为零，从而推得(1).

综上所述，定理得证.

2. *函数在极点的去心邻域内的性质*

定理 4.14 若点 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列三个条件是等价的.

(1)点 a 为 $f(z)$ 的 m 级极点；

(2) $f(z)$ 在点 a 某个去心邻域 $0 < |z-a| < R$ 内表示为 $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-a)^m}$ 其中的 $h(z)$ 在点 a 的邻域 $|z-a| < R$ 内解析，且 $h(a) \neq 0$；

(3)点 a 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点(可去奇点视作解析点时).

定理 4.15 点 a 为函数 $f(z)$ 的极点的充分必要条件是 $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$.

3. 函数在本性奇点的去心邻域内的性质

定理 4.16　点 a 为函数 $f(z)$ 的本性奇点的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 不存在，即当 $z\to a$ 时，$f(z)$ 既不趋于有限值，也不趋于 ∞．

定理 4.17　若点 a 为 $f(z)$ 的本性奇点，且 $f(z)$ 在点 a 的充分小的邻域内不为零，则点 a 必为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的本性奇点．

4.6.3　复平面上孤立奇点分类的例子

【例 4.15】　试问点 $z=0$ 为函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{2}{z}}$ 的哪类奇点．

解　处理这类问题的思路十分清晰：一是判定所给的点是所给函数的孤立奇点，二是判定该点是哪类孤立奇点．

首先，因 $f(z)$ 在复平面上只有有限个奇点，所以，点 $z=0$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点．其次，因 $f(z)$ 在点 $z=0$ 的罗朗级数为

$$\mathrm{e}^{\frac{2}{z}}=1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{2!z^2}+\frac{2^3}{3!z^3}+\cdots+\frac{2^n}{n!z^n}+\cdots,\ 0<|z|<+\infty$$

所以，由定义知点 $z=0$ 为 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{2}{z}}$ 的本性奇点．

【例 4.16】　设 $f(z)=5(1+\mathrm{e}^z)^{-1}$，试求 $f(z)$ 在复平面上的奇点，并判定其类别．

解　首先，求 $f(z)$ 的奇点．$f(z)$ 的奇点出自方程 $1+\mathrm{e}^z=0$ 的解．解方程得

$$z=\mathrm{Ln}(-1)=(2k+1)\pi\mathrm{i},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

若设 $z_k=(2k+1)\pi\mathrm{i},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，则易知 z_k 为 $f(z)$ 的孤立奇点．另外，因

$$(1+\mathrm{e}^z)\Big|_{z=z_k}=0,\qquad (1+\mathrm{e}^z)'\Big|_{z=z_k}\neq 0$$

所以，由零点的定义知 z_k 为 $1+\mathrm{e}^z$ 的一级零点．从而知 $z_k=(2k+1)\pi\mathrm{i}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 均为 $f(z)$ 的一级极点．

【例 4.17】试问 $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}$ 的哪类奇点？

解　因为 $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}=\infty$，所以 $z=0$ 为 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}$ 的极点．又 e^z-1 在 $z=0$ 处为零，所以 $z=0$ 不是 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}$ 的二级极点.在 $0<|z|<+\infty$ 内，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}&=\frac{1}{z^2}\left[\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right)-1\right]\\&=\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-2}}{n!}+\cdots\end{aligned}$$

所以 $z=0$ 是一级极点.

【例 4.18】 试说明点 $z=0$ 不是 $f(z)=\left(\sin\frac{1}{z}\right)^{-1}$ 的孤立奇点.

解 因满足 $\sin\frac{1}{z}=0$ 的点

$$z_n=\frac{1}{n\pi},\quad n=\pm1,\pm2,\cdots$$

均为 $f(z)$ 的奇点，而点 $z=0$ 也是 $f(z)$ 的奇点，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$

即点 $z=0$ 为点集 $E=\left\{z_n \mid z_n=\frac{1}{n\pi},n=\pm1,\pm2,\cdots\right\}$ 的聚点，所以，不存在使 $f(z)$ 于其中解析的去心邻域 $0<|z|<R$，故点 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点.

由于 $z_n=\frac{1}{n\pi},\quad n=\pm1,\pm2,\cdots$ 满足 $\sin\frac{1}{z}=0$，所以，z_n 为 $f(z)$ 的极点，因此，若要问点 $z=0$ 是 $f(z)$ 的哪类奇点时，则可回答如下：点 $z=0$ 是 $f(z)$ 的极点的聚点(或极限点)，或者说点 $z=0$ 是 $f(z)$ 的非孤立奇点.

4.6.4　函数在无穷远点的去心邻域的性质

称满足不等式

$$r<|z|<+\infty,\quad r\geqslant 0$$

的点 z 的全体所成的集合为**无穷远点 $z=\infty$ 的去心邻域**，记作 $U_{\circ}(\infty,r)$ 或 $U^{\circ}(\infty,r)$.

若函数 $f(z)$ 在无穷远点的某个去心邻域 $r<|z|<+\infty$ 内解析，则称点 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的**孤立奇点**. 若点 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的奇点，但不是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则称点 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的**非孤立奇点**.

约定：若无特殊声明，则约定点 $z=\infty$ 为任意函数的奇点.

1. *函数在无穷远点的罗朗级数*

若令 $\zeta=\frac{1}{z}$，则 $f(z)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=h(\zeta)$.

于是，可用 $h(\zeta)$ 在 $\zeta=0$ 的去心邻域 $0<|\zeta|<\frac{1}{r}$ 的罗朗级数及其性质来定义 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的去心邻域 $r<|z|<+\infty$ 的罗朗级数及其性质.

设 $\zeta=0$ 为 $h(\zeta)$ 的孤立奇点，则有

$$\begin{aligned}h(\zeta)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\zeta^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\zeta^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}\zeta^{-n}\\&=\cdots+\frac{C_{-n}}{\zeta^n}+\cdots+\frac{C_{-2}}{\zeta^2}+\frac{C_{-1}}{\zeta}+C_0+C_1\zeta+C_2\zeta^2+\cdots+C_n\zeta^n+\cdots,\quad 0<|\zeta|<\frac{1}{r}\end{aligned}$$

若令 $\zeta=\frac{1}{z}$，则有

$$f(z)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=h(\zeta)=h\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}z^{n}$$
$$=\cdots+C_{-n}z^n+\cdots+C_{-2}z^2+C_{-1}z+C_0+C_1\frac{1}{z}+C_2\frac{1}{z^2}+\cdots+C_n\frac{1}{z^n}+\cdots,\quad r<|z|<+\infty$$

若再令 $C_{-n}=b_n$，　$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，则有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_{-n}z^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$$
$$=\cdots+\frac{b_{-n}}{z^n}+\cdots+\frac{b_{-2}}{z^2}+\frac{b_{-1}}{z}+b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots,\quad r<|z|<+\infty \tag{4.13}$$

称级数(4.13)为函数 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的**罗朗级数**，称其中的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$ 为级数(4.13)的**主要部分**，称其中的级数 $\sum_{n=0}^{\infty}b_{-n}z^{-n}$ 为级数(4.13)的**解析部分**.

注意：与函数 $f(z)$ 在有限远点的情况相反，函数 $f(z)$ 在无穷远点的罗朗级数的解析部分是由非正幂项组成，而主要部分是由正幂项组成.

【例 4.19】　试求 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在点 $z=\infty$ 的罗朗级数.

解法 1　归为在原点的展式．设 $\zeta=\dfrac{1}{z}$

于是，求 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的罗朗级数便可转化为求函数

$$h(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{\zeta}{\zeta-1}\text{ 在 }\zeta=0\text{ 的罗朗级数}$$

由于

$$h(\zeta)=\frac{\zeta}{\zeta-1}=\frac{-\zeta}{1-\zeta}=-\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{n+1},0<|\zeta|<1$$

所以，

$$f(z)=h\left(\frac{1}{z}\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},1<|z|<+\infty$$

解法 2　利用展式 $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$.

将 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 展成罗朗级数，即将 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的去心邻域($f(z)$ 在其中解析)内表成罗朗级数．由于 $f(z)$ 在扩充复平面只有 1 与 ∞ 两个奇点，所以，$f(z)$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内解析，从而在其中可将 $f(z)$ 展成罗朗级数．此时，利用不等式 $1<|z|<+\infty$ 便得

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},1<|z|<+\infty$$

2. 孤立奇点 $z=\infty$ 的分类

设点 $z=\infty$ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点：

(1)若 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的罗朗级数的主要部分为零，则称点 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的**可去奇点**；

(2)若 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的罗朗级数的主要部分有有限项，设为

$$b_1 z+b_2 z^2+\cdots+b_m z^m,\quad b_m\neq 0$$

则称点 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的 m **级(阶)极点**；

(3)若 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的罗朗级数的主要部分有无限项，则称点 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的**本性奇点**.

依此可知，点 $z=\infty$ 为 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 的可去奇点．若取 $f(\infty)=1$，那么 $f(z)$ 在 ∞ 解析.

定理 4.18　若点 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列条件是等价的：

(1)点 $z=\infty$ 为函数 $f(z)$ 的可去奇点；

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=C(\neq\infty)$；

(3) $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的某个去心邻域 $r<|z|<+\infty$ 内有界.

定理 4.19　若点 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列条件是等价的：

(1)点 $z=\infty$ 为函数 $f(z)$ 的 m 级极点；

(2) $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的某个去心邻域 $r<|z|<+\infty$ 内能表成

$$f(z)=z^m\alpha(z)$$

其中，$\alpha(z)$ 在点 $z=\infty$ 的邻域 $|z|>r$ 内解析(此时，需定义函数在点 $z=\infty$ 解析，或将问题归为有限点 $\zeta=0$ 处理)，且 $\alpha(\infty)\neq 0$.

(3)点 $z=\infty$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点.

定理 4.20　点 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的极点的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$.

定理 4.21　点 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在.

4.7　习　　题

1. 下列数列 $\{a_n\}$ 是否收敛？如果收敛，求出它们的极限.

(1) $a_n=\mathrm{i}^n+\dfrac{1}{n}$;

(2) $a_n=\dfrac{1+n\mathrm{i}}{1-n\mathrm{i}}$;

(3) $a_n=\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{n\pi\mathrm{i}}{2}}$;

(4) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}\mathrm{i}^n$.

2. 求下列级数的收敛半径.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}z^n$；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$；

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$；

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}z^n$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{n!}$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}z^n$.

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 处收敛，而在 $z=3$ 处发散？为什么？

4. 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径为 R，证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Re}\,c_n)z^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Im}\,c_n)z^n$ 的收敛半径都不小于 R.

5. 对于任何实数 x，$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 存在各阶导数，但其麦克劳林(Maclaurin)级数

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

却只在 $|x|<1$ 时收敛，利用复变函数论中的幂级数理论，说明其理由.

6．如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 在它的收敛圆的圆周上一点 z_0 处绝对收敛，证明它在收敛圆所围的闭区域上也绝对收敛.

7. 把下列函数展开成 z 的幂级数，并指出它的收敛半径：

(1) $\dfrac{1}{1+z^3}$；

(2) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$；

(3) $\cos z^2$；

(4) $\mathrm{sh}\, z$；

(5) $\sin\dfrac{1}{1-z}$；

(6) $\cos^2 z$；

(7) e^{z^2}；

(8) $e^{\frac{z}{z-1}}$.

8．把下列函数在指定点 z_0 处展开泰勒级数，并指出其收敛半径.

(1) $\dfrac{z-1}{z+1}, z_0=1$；

(2) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0=1$；

(3) $\dfrac{1}{z^2}, z_0=-1$；

(4) $\dfrac{1}{4-3z}, z_0=1+\mathrm{i}$；

(5) $\sin z, z_0=\pi$；

(6) $\tan z, z_0=\dfrac{\pi}{4}$.

9．把下列级数在指定圆环域内展为洛朗级数.

(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}, 1<|z|<2$；

(2) $\dfrac{1}{z(1-z)^2}, 0<|z|<1, 0<|z-1|<1$；

(3) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}, 0<|z-1|<1, 1<|z-2|<\infty$；

(4) $e^{\frac{1}{1-z}}, 1<|z|<\infty$；

(5) $\sin\dfrac{1}{1-z}, 0<|z-1|<\infty$；

(6) $\dfrac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}$，在以 i 为中心的圆环域内.

第 5 章　留数及其应用

教学提示：留数是复积分和复级数理论相结合的产物，在复变函数本身及其实际应用中都是很重要的，它与计算围线积分相关的问题有密切关系. 本章的中心问题是留数定理，通过本章的学习可以看到，前面的积分定理、积分公式都是留数定理的特殊情况，在学习实积分时计算比较复杂的某些实积分，用留数理论来解决会变得相对简单.

教学目标：了解函数在孤立奇点留数的概念；掌握并能熟练应用留数定理；掌握留数的计算，尤其要熟悉较低阶极点处留数的计算；能用留数来计算三种标准类型的定积分.

5.1　留数的概念与计算

将例 4.13 与例 4.14 的结果转化为如下形式

$$\int_{|z|=\frac{1}{5}} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z = \int_{|z|=\frac{1}{5}}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots\right)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} = C_{-1}\times 2\pi\mathrm{i}$$

$$\int_{|z|=2} \sin\frac{2}{z}\mathrm{d}z = \int_{|z|=\frac{1}{5}}\left(\frac{2}{z}+\frac{2^3}{3!z^3}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{(2n+1)!z^{2n+1}}+\cdots\right)\mathrm{d}z = 4\pi\mathrm{i} = C_{-1}\times 2\pi\mathrm{i}$$

这又可写成

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=\frac{1}{5}} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z = C_{-1} \text{ 与 } \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=2}\sin\frac{2}{z}\mathrm{d}z = C_{-1}$$

若用一般的记号表示，则它们可写成

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = C_{-1} \tag{5.1}$$

其中，积分路径 C 为圆周：$|z-a|=\rho,\ \ a\neq\infty$，被积函数 $f(z)$ 在点 a 不解析，但在 $0<|z-a|\leqslant\rho$ 上解析，C_{-1} 为 $f(z)$ 在点 a 的罗朗级数中 $\frac{1}{z-a}$ 的系数.

式(5.1)具有一般性吗？若是，则不仅可更深刻地理解罗朗级数与积分的紧密联系，而且会产生一种“创造”的欲望：赋予式(5.1)左端一个新的名称，即建立一个新的概念，然后，基于这一新概念再去探讨建立一种新的理论的可能性.

下面将要讨论的留数理论即把上述愿望变成了现实.

5.1.1 关于有限点的留数概念

定义 5.1 设 $a(\neq\infty)$ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，C 为圆周：$|z-a|=\rho$，若 $f(z)$ 在 $0<|z-a|\leqslant\rho$ 上解析，则称

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

为 $f(z)$ 在点 a 的**留数**(或**残数**)，记作 $\mathrm{Res}(f,a)$ 或 $\mathrm{Res}(a)$，即

$$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz \tag{5.2}$$

由此定义可见：

(1)符号 $\mathrm{Res}(f,a)$ 只有当点 a 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点时才有意义．例如，符号 $\mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}},0\right)$ 就无意义．因为，点 $z=0$ 不是函数 $\left(\sin\dfrac{1}{z}\right)^{-1}$ 的孤立奇点．

(2)$\mathrm{Res}(f,a)$ 与积分路径 C 的半径 ρ 的大小无关(只要使 C 满足定义的条件即可)．例如，在

$$\mathrm{Res}\left(e^{\frac{1}{z}},0\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{\frac{1}{z}}dz$$

中，C 的半径 $\rho=\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2},4,\cdots$ 时都不会改变 $\mathrm{Res}\left(e^{\frac{1}{z}},0\right)=1$ 的结果．

定义 5.1 中关于点 a 要求其必须是孤立奇点，由于留数是用围线积分定义的，所以如果 a 点为解析点，也认为其留数存在(为零)．还要特别指出的是，其中关于点 a，积分路径 C 及函数 $f(z)$ 的条件与假设都是在观察例 5.6 与例 5.7 的过程中抽象、提炼出来的，亦即经历了一个从感性认识升华到理性认识的过程．若注意到这点，则对于养成良好的思维习惯，从而有利于独立研究问题进行创造性的工作将是有益的．

5.1.2 关于留数的计算

由留数的定义，可以得到下列计算规则．

方法 1 利用式(5.2)计算 $\mathrm{Res}(f,a)$．

用该方法时，对具体的 $f(z)$，可以选取特殊的值充当式(5.2)中积分路径圆周 C 的半径 ρ 进行计算．

方法 2 $\mathrm{Res}(f,a)=C_{-1}$． (5.3)

这里的 C_{-1} 是函数 $f(z)$ 在点 $z=a$ 的去心邻域内所展成的罗朗级数中 $\dfrac{1}{z-a}$ 的系数．

方法 3 若点 a 为函数 $f(z)$ 的一级极点，则

$$\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z) \tag{5.4}$$

方法 4　若点 a 为函数 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{h(z)}$ 的一级极点($\varphi(z)$ 与 $h(z)$ 均在点 a 解析，且 $\varphi(a)\neq 0, h(a)=0, h'(a)\neq 0$)，则

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{\varphi(a)}{h'(a)} \tag{5.5}$$

事实上，因为 $h(a)=0, h'(a)\neq 0$，故 a 为函数 $h(z)$ 的一级零点，从而 a 是 $\dfrac{1}{h(z)}$ 的一级极点.因此，有

$$\frac{1}{h(z)}=\frac{1}{z-a}Q(z)$$

其中，$Q(z)$ 在 a 点解析且 $Q(a)\neq 0$.由此得

$$f(z)=\frac{1}{z-a}P(z)$$

其中，$P(z)=\varphi(z)Q(z)$ 在 a 解析且 $P(a)=\varphi(a)Q(a)\neq 0$，故点 a 为函数 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{h(z)}$ 的一级极点.

由方法 3，$\operatorname{Res}(f,a)=\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$，而 $h(a)=0$，所以有

$$(z-a)f(z)=\frac{\varphi(z)}{\dfrac{h(z)-h(z)}{z-a}}$$

令 $z\to a$，两端求极限，即证得式(5.5).

方法 5　若点 a 为函数 $f(z)$ 的 m 级极点，则

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right] \tag{5.6}$$

事实上，由于

$$f(z)=C_{-m}(z-a)^{-m}+\cdots+C_{-2}(z-a)^{-2}+C_{-1}(z-a)^{-1}+C_0+C_1(z-a)+\cdots$$

以 $(z-a)^m$ 乘上式两端，得

$$(z-a)^m f(z)=C_{-m}+C_{-m+1}(z-a)+\cdots+C_{-1}(z-a)^{m-1}+C_0(z-a)^m+\cdots$$

两边求($m-1$)阶导数，得

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]=(m-1)!C_{-1}+[\text{含有}\,(z-a)\,\text{正幂的项}].$$

令 $z\to a$，两端求极限，即证得式(5.6). 式(5.4)是式(5.6)的特例.

由以上 5 种计算留数的方法可见，前两种适用于孤立奇点，后三种仅适用于极点情形.

【例 5.1】　设 $f(z)=\dfrac{5z-2}{z(z-1)}$，求 $\operatorname{Res}(f,0)$.

解法 1　由式(5.2)得

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{4}}\frac{5z-2}{z(z-1)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{4}}\frac{\frac{5z-2}{(z-1)}}{z}dz=\left(\frac{5z-2}{(z-1)}\right)_{z=0}=2$$

注意：这里的积分路径的半径并非只能取 1/4，只须使半径小于 1 即可满足定义 5.1 的条件.

解法 2　因点 $z=0$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点，所以，在 $N^{\circ}\left(0,\frac{1}{3}\right):0<|z|<\frac{1}{3}$ 内有

$$f(z)=\frac{5z-2}{z}\cdot\frac{-1}{1-z}=\left(\frac{2}{z}-5\right)\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{2}{z}-3\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

由此得 $C_{-1}=2$，依式(5.3)得 $\operatorname{Res}(f,0)=2$.

解法 3　因点 $z=0$ 为 $f(z)$ 的一级极点，所以，依式(5.4)得

$$\operatorname{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}z\cdot\frac{5z-2}{z(z-1)}=2$$

解法 4　因点 $z=0$ 为 $f(z)=\dfrac{5z-2}{z(z-1)}$ 的一级极点，所以，由式(5.5)得

$$\operatorname{Res}(f,0)=\left\{\frac{5z-2}{[z(z-1)]'}\right\}_{z=0}=2$$

5.1.3　关于无穷远点的留数

仿照有限远点留数的定义，可以对无穷远点的留数给出定义.

定义 5.2　设 $z=\infty$ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，C 为圆周：$|z|=\rho$，若 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内解析 $(R<\rho)$，则称 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz$ 为函数 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的**留数**(或残数)，记作 $\operatorname{Res}(f,\infty)$ 或 $\operatorname{Res}(\infty)$，即

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz \tag{5.7}$$

这里的 C^- 表示积分是沿围线 C 的负方向进行.

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)dz$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\left(\cdots+\frac{C_{-1}}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n\right)dz=-\frac{1}{2\pi i}C_{-1}2\pi i=-C_{-1}$$

即

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-C_{-1} \tag{5.8}$$

至此，计算 $\mathrm{Res}(f,\infty)$ 的方法有两种：式(5.7)与式(5.8).

注意：(1)利用式(5.7)时，要注意其积分路径是 C^- 而非 C；

(2)利用式(5.8)时，要注意两点，一是其中的 C_{-1} 是 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的某个去心邻域内的罗朗级数中 $\dfrac{1}{z}$ 的系数，二是 C_{-1} 前面的“－”号别丢了；

(3)可以把在 $z=\infty$ 处的留数转化为在零点处的留数来对待，变换后用下式计算 $\mathrm{Res}(f,\infty)$.

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right] \tag{5.9}$$

事实上，由于 $z=\infty$ 为孤立奇点，取半径 ρ 充分大的正向圆周 $C:|z|=\rho$，使 $f(z)$ 在 $\rho\leqslant|z|<+\infty$ 内无其他有限奇点.令 $z=\dfrac{1}{\varsigma}$，并设 $z=\rho e^{i\theta},\varsigma=re^{i\varphi}$，则 $\rho=\dfrac{1}{r}$，$\theta=-\varphi$，于是有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f(z),\infty)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})\rho i\theta d\theta\\
&=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)\frac{i}{re^{i\varphi}}d\varphi\\
&=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)\frac{1}{(re^{i\varphi})}d(re^{i\varphi})\\
&=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\varsigma|=\frac{1}{\rho}}f\left(\frac{1}{\varsigma}\right)\frac{1}{(\varsigma)}d(\varsigma)\ (|\varsigma|=1/\rho\ \text{为正向})\\
&=-\mathrm{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right)
\end{aligned}$$

【例 5.2】　设 $f(z)=(1+z^2)e^{-z}$，求 $\mathrm{Res}(f,\infty)$.

解　取圆周 $C:|z|=2$，由式(5.7)得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,\infty)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}\frac{1+z^2}{e^z}dz\\
&=-\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1+z^2}{e^z}dz\\
&=0
\end{aligned}$$

【例 5.3】　试证：若 $f(z)=z^{15}(z^2+1)^{-2}(z^4+2)^{-3}$，则 $\mathrm{Res}(f,\infty)=-1$.

解法一　只须计算 $\mathrm{Res}(f,\infty)$ 即可．为此，利用式(5.8)来做．这需将 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的某个去心邻域 $U^\circ(\infty,\ R)$ 内展成罗朗级数，而这又需确定一个 R，使 $f(z)$ 在 $U^\circ(\infty,\ R)$ 内解析．为确定 R，只须将 $f(z)$ 的全部有限奇点置于某个圆 $|z|<R$ 中即可．而 $f(z)$ 的全部有限奇点来自使 $z^2+1=0$ 及 $z^4+2=0$ 的点，所以，由这些点的分布状况，只须取 $R\geqslant 2$

即可.

今取 $R=3$，于是，$f(z)$ 在 $N^{\circ}(\infty,R)^{\circ}:3^{\circ}<|z|<+\infty$ 内的罗朗级数为

$$f(z)=\frac{z^{15}}{z^{16}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^2\left(1+\frac{2}{z^4}\right)^3}$$
$$=\frac{1}{z}\left(1-2\cdot\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1-3\cdot\frac{2}{z^4}+\cdots\right)$$

由二级数乘法法则可推得 $C_{-1}=1$，故由式(5.8)推得

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-1$$

解法二 利用式(5.9). 由于 $z=0$ 为

$$f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}=\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3}$$

的一级极点.所以

$$\mathrm{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right)=\lim_{z\to 0}z\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3}=1$$

故

$$\mathrm{Res}(f(z),\infty)=-\mathrm{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right)=-1$$

5.2 留数定理

定理 5.1 设区域 G 是由围线 C 的内部构成(见图 5.1)，若函数 $f(z)$ 在 G 内除含有限个奇点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外解析，且在 $\overline{G}=G+C$ 上除点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外连续，则

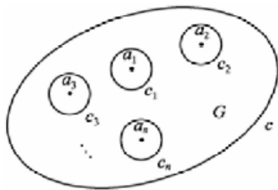


图 5.1

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}\mathrm{Res}(f,a_j) \tag{5.10}$$

证 分别以点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为圆心，以适当的 $\rho(>0)$ 为半径作圆周 $C_j:|z-a_j|=\rho(j=1,2,\cdots,n)$，使 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 与 C 一起满足定理 3.4 的条件．于是，经验证，由定理 3.4 得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{n}\oint_{C_j}f(z)\mathrm{d}z$$

而

$$\oint_{C_j} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(f, a_j), \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

故

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1} \mathrm{Res}(f, a_j)$$

定理 5.1 被称为**留数基本定理**．它揭示了复变函数沿围线的积分与留数间的联系．从而，提供了一种计算复变函数沿围线积分的方法．

【例 5.4】　计算积分 $\int_{|z|=1} \frac{2\mathrm{i}}{z^2 + 2az + 1}\mathrm{d}z, \quad a > 1$．

解　首先，弄清被积函数在积分路径内部有无奇点．由 $z^2 + 2az + 1 = 0$ 求出被积函数的奇点有

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1} \text{ 与 } z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$$

因 $a > 1$，所以，$|z_2| > 1$，又因 $|z_1 z_2| = 1$，故 $|z_1| < 1$，即在积分路径内部只有被积函数的一个奇点 $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$．

其次，经检验，由式(5.10)得

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{2\mathrm{i}}{z^2 + 2az + 1}\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(\frac{2\mathrm{i}}{z^2 + 2az + 1}, z_1\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\lim_{z \to z_1}\left[(z - z_1)\frac{2\mathrm{i}}{(z - z_1)(z - z_2)}\right] = \frac{-2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}\end{aligned}$$

为将研究深入下去，若取 C 为圆周：$|z| = \rho$，且使 $f(z)$ 在扩充复平面上的全部有限奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均位于 C 的内部，则由定义 5.2 可将式(5.10)的左端写成

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\mathrm{d}z &= -\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z \\ &= -2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(f, \infty)\end{aligned}$$

于是，由式(5.10)得

$$\mathrm{Res}(f, \infty) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_j) = 0$$

这说明若函数 $f(z)$ 在扩充复平面上仅有有限个奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，∞，除这些点外 $f(z)$ 均解析，则 $f(z)$ 在这些奇点的留数和为零．即用函数关于无穷远点的留数概念观察定理 5.1 时，有：

定理 5.2　若函数 $f(z)$ 在扩充复平面上除有限个奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，∞ 外是解析的，则 $f(z)$ 在点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，∞ 处的留数之和为零，即

$$\mathrm{Res}(f,\infty)+\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_j)=0 \tag{5.11}$$

由式(5.10)与式(5.11)可见：若能较容易地算出 $\mathrm{Res}(f,\infty)$，且 n 越大，则利用式(5.11)计算 $\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_j)$ 的优越性也越大，从而大大方便了积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的计算. 定理 5.2 与定理 5.1 配合得如此“默契”，再一次体现了数学内部的“和谐性”，从而给予了人们一种“美的享受”！

【例 5.5】 设 $f(z)=(z-5)^{-1}\left(z^7-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$，$a_j(j=1,2,\cdots,7)$ 为方程 $z^7-\dfrac{1}{2}=0$ 的解，试求 $\mathrm{Res}(f,5)+\sum_{j=1}^{7}\mathrm{Res}(f,a_j)$ 的值.

解 经检验，可用定理 5.2. 于是，有

$$\mathrm{Res}(f,5)+\sum_{j=1}^{7}\mathrm{Res}(f,a_j)=-\mathrm{Res}(f,\infty)$$

为计算 $\mathrm{Res}(f,\infty)$，将 $f(z)$ 在 $N^{\circ}(\infty,9):9<|z|<+\infty$ 内展成罗朗级数，有

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{(z-5)\left(z^7-\dfrac{1}{2}\right)}\\
&=\frac{1}{z\left(1-\dfrac{5}{z}\right)z^7\left(1-\dfrac{\frac{1}{2}}{z^7}\right)}\\
&=\frac{1}{z^8}\left(1+\frac{5}{z}+\frac{5^2}{z^2}+\cdots+\frac{5^n}{z^n}+\cdots\right)\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{z^7}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{z^{14}}+\cdots+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(z^7\right)^n}+\cdots\right)
\end{aligned}$$

利用级数乘法将上式右端写成级数后得 $C_{-1}=0$，于是，有 $\mathrm{Res}(f,\infty)=-C_{-1}=0$，从而得

$$\mathrm{Res}(f,5)+\sum_{j=1}^{7}\mathrm{Res}(f,a_j)=0$$

5.3　留数在计算某些定积分上的应用

由 5.2 节的讨论可以看到，留数在计算复变函数 $f(z)$ 沿围线 C 的积分时是很有用的. 基于此，能否研究、导出留数在其他方面的应用？

若将围线 C 分成两条(或 m 条)首尾相接的曲线 C_1 与 C_2，而且设 $f(z)$ 在由 C 的内部 G 及 C 构成的闭区域 $\overline{G}=G+C$ 上满足定理 5.1 的条件，同时，$f(z)$ 在 G 内也满足定理 5.1 的条件，则由定理 5.1 有

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_j)$$

其中，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $f(z)$ 在 G 内的全部奇点.

由上式可知，由于右端易求，所以，在左端的两个积分中，只要能求出其中之一，那么，另一个也就可求出了. 因此，留数不仅可用来计算函数沿闭路的积分，而且还可用来计算某些函数沿非闭路的积分.

特别地，若要计算实变函数 $f(x)$ 沿 x 轴上某一路径 (a,b) 的积分时，则为了利用定理 5.1，可适当选取辅助函数 $f(z)$ (或 $F(z)$)，并适当补充某一曲线 Γ，使 Γ 连同 (a,b) 一起围成一个区域(见图 5.2)，且使 $f(z)$ (或 $F(z)$)在 G 与 $\overline{G}$ 上满足定理 5.1 的条件，于是，由定理 5.1 便有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_j)$$

其中，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $f(z)$ 在 G 内的全部奇点.

由此可知，一旦左端中的积分 $\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z$ 可以求得或可用所求积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示时，那么，计算积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的问题就解决了. 因为，右端容易求出. 但是，一般而言，积分 $\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z$ 的计算是不容易的. 不过，如果再使问题变得特殊一些，例如，取 $a=-R,\quad b=R$，用半个圆周 C_R 取代 Γ (见图 5.3)，那么，有可能算出积分 $\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$，从而计算出实积分 $\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$. 很遗憾，这也不是件容易的事.

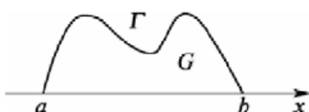


图 5.2

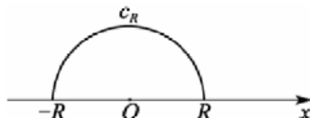


图 5.3

尽管如此，若能算出 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$，则会是怎样一种结果呢?

将定理 5.1 用于图 5.3，有

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_j)$$

若两端取极限后得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_j)$$

则计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的问题就归为计算极限$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$的问题了，因为，右端易求．而对某些函数$f(z)$(或$F(z)$)来说，人们在实践中已获得了一些计算$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$的结果．这些结果被归纳为一些引理，如引理 5.1、引理 5.2 与引理 5.3(证明从略).

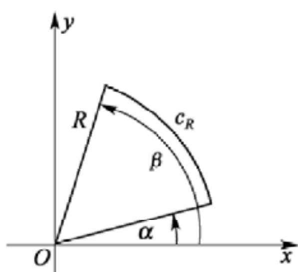


图 5.4

引理 5.1 设C_R为圆周$C:|z|=R$上的一段弧(见图 5.4)，函数$f(z)$在C_R(R充分大时)上连续，若对C_R上的任意的点z均有

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)=k$$

则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = k(\beta-\alpha)\mathrm{i}$$

引理 5.2 设C_r为圆周$C:|z-a|=r$上的一段弧(见图 5.5)，函数$f(z)$在C_r (r充分小时)上连续，若对C_r上的任意的点z均有

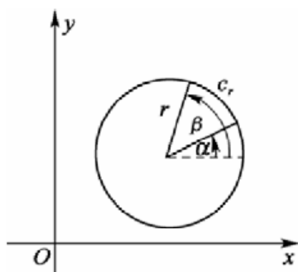


图 5.5

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=k$$

则

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = k(\beta-\alpha)\mathrm{i}$$

引理 5.3 设C_R为圆周$C:|z|=R$上的上半个圆周$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$F(z)$在$C_R$($R$充分大时)上连续，若对$C_R$上的任意的点$z$均有$\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$，则$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} F(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z=0,\quad m>0$.

利用这些引理讨论三类实积分的计算．为方便起见，对将要讨论的积分的存在或收敛均不一一检验，即在积分存在的前提下讨论．

5.3.1 积分Ⅰ：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$的计算

这里的$P(x)$与$Q(x)$分别为x的n次和m次多项式，且有$m-n\geqslant 2$；$P(x)$与$Q(x)$无公因式；$Q(x)$在实轴上无零点．

解法

第一步：选取辅助函数

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

并求出 $f(z)$ 在上半平面的全部奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$．

第二步：选取辅助积分路径 C 如图 5.6 所示：由实轴上的 $[-R,R]$ 与上半圆周 C_R 组成的围线 C，其中的 R 的选取要使 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 全在 C 的内部；

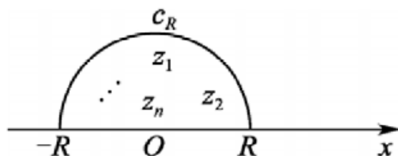


图 5.6

第三步：利用定理 5.1 得

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_j)$$

令 $R\to+\infty$，对上式两端取极限得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_j)$$

而由引理 5.1 有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_j)$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},z_j\right)\tag{5.12}$$

式(5.11)可作为公式用．

【例 5.6】　计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$．

解　经验证，此积分可用式(5.12)计算．

首先，求出 $\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{z^2}{z^4+z^2+1}$ 在上半平面的全部奇点．令

$$z^4+z^2+1=0$$

即

$$\begin{aligned}z^4+z^2+1&=(z^4+2z^2+1)-z^2\\&=(z^2+1)^2-z^2\\&=(z^2+z+1)(z^2-z+1)=0\end{aligned}$$

于是，$\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在上半平面的全部奇点只有两个：$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 与 $\beta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$．

且知道，α 与 β 均为 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的一级极点.

其次，计算留数，有

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},\alpha\right)&=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)(z+\alpha)(z+\beta)}\\&=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{4\sqrt{3}\mathrm{i}}\\\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},\beta\right)&=\lim_{z\to\beta}(z-\beta)\frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)(z+\alpha)(z+\beta)}\\&=\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{4\sqrt{3}\mathrm{i}}\end{aligned}$$

最后，将所得留数代入式(5.11)得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}&=2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},\alpha\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},\beta\right)\right]\\&=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

5.3.2　积分Ⅱ：$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$ 的计算

这里的 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 分别为 x 的 n 次和 m 次多项式，且有 $m-n\geqslant 1$；$P(x)$ 与 $Q(x)$ 无公因式；$Q(x)$ 在实轴上无零点；$k>0$.

解

第一步：选取辅助函数 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$ 并求出 $f(z)$ 位于上半平面的全部奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$；

第二步：选取辅助积分路径 C 如图 5.6 所示：该路径是由实轴上的 $[-R,R]$ 与上半圆周 C_R 组成的围线 C，其中 R 的选取要使 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 全位于 C 的内部；

第三步：应用定理 5.1 得

$$\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_j)$$

第四步：令 $R\to+\infty$，对上式两端取极限得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x+\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_j)$$

而由引理 5.3 有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_j)$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_j) \tag{5.13}$$

式(5.13)可作为公式用，且由式(5.13)可导出以下两个公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos kx\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\left[2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz},z_j\right)\right] \tag{5.14}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin kx\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz},z_j\right)\right] \tag{5.15}$$

【例 5.7】　计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x,\quad a>0$.

解　经验证，该积分可用式(5.13)计算.

首先，求出辅助函数 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+a^2}$ 在上半平面的全部奇点.

由 $z^2+a^2=0$ 解得 $z=a\mathrm{i}$ 与 $z=-a\mathrm{i}$ 为 $f(z)$ 的奇点，而 $a>0$，所以，$f(z)$ 在上半平面只有一个奇点 $a\mathrm{i}$，且 $a\mathrm{i}$ 为 $f(z)$ 的一级极点.

其次，计算留数．有

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+a^2},a\mathrm{i}\right)=\lim_{z\to a\mathrm{i}}(z-a\mathrm{i})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-a\mathrm{i})(z+a\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2a\mathrm{i}}$$

最后，由式(5.13)得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+a^2},a\mathrm{i}\right)=\frac{\pi}{a\mathrm{e}^{a}}$$

基于例 5.7，由式(5.14)与式(5.15)容易得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a\mathrm{e}^{a}} \text{ 与 } \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=0$$

【例 5.8】　计算积分 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\left(x^2+b^2\right)^2}\mathrm{d}x,\quad \beta>0,\quad b>0$.

解

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{(x^2+b^2)^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{(x^2+b^2)^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{0}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}}{(x^2+b^2)^2}\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z}}{(z^2+b^2)^2},b\mathrm{i}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{1!}\lim_{z\to b\mathrm{i}}\left[(z-b\mathrm{i})^2\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z}}{(z-b\mathrm{i})^2(z+b\mathrm{i})^2}\right]'\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(2\pi\mathrm{i}\frac{\beta\mathrm{e}^{-b\beta}}{4b}\right)=\frac{\pi\beta}{4b\mathrm{e}^{b\beta}}$$

5.3.3 积分Ⅲ：$\int_0^{2\pi}Ra(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$ 的计算

这里的 $Ra(\cos x,\sin x)$ 表示一个关于 $\cos x$ 及 $\sin x$ 的有理函数，且它在 $[0,2\pi]$ 上连续.

由 $\cos x$ 及 $\sin x$ 均为周期函数，有 $\int_0^{2\pi}Ra(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}Ra(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$ 怎样计算 3 型积分？这里给出两种方法.

(1)将Ⅲ型积分归为计算复变函数沿围线的积分.

为此，需将被积函数变为复变函数，且要将积分路径变成一条围线.

为将 $Ra(\cos x,\sin x)$ 变为 z 的复变函数，只须将 $\cos x$ 与 $\sin x$ 分别用变量 z 表示即可. 而这又需先将 $\cos x$ 与 $\sin x$ 分别用 x 表示出来. 在表示 $\cos x$ 与 $\sin x$ 的众多公式中有一个是 $\cos x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}+1}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$ 与 $\sin x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}-1}{2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.此时，若令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$，则有 $\cos x=\frac{z^2+1}{2z}$ 与 $\sin x=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$.

同时，由于 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$，所以 $|z|=1$，且当 x 由 0 变到 2π 时，z 恰好在圆周 $C:|z|=1$ 上变动一周. 所以，积分路径变成了围线 $C:|z|=1$.

至此，只须令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$，即可实现将 3 型积分归结为计算复变函数沿围线的积分的愿望. 有

$$\int_0^{2\pi}Ra(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x=\int_{|z|=1}Ra\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

(2)将Ⅲ型积分归结为计算 1 型积分.

为此，需将被积函数变为某一实变量 t 的有理函数，且要将积分路径变为 $(-\infty,+\infty)$.

为将 $Ra(\cos x,\sin x)$ 变为实变量 t 的有理函数，只须将 $\cos x$ 与 $\sin x$ 分别表成 t 的有理函数即可. 而这又需先将 $\cos x$ 与 $\sin x$ 分别用 x 表示出来. 在表示 $\cos x$ 与 $\sin x$ 的众多公式中有一个是

$$\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \text{ 与 } \sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

此时，若令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\cos x$ 与 $\sin x$ 均可用 t 的有理函数表示出来. 从而，实现了将

被积函数 $Ra(\cos x,\sin x)$ 变为 t 的有理函数的愿望．有

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ 与 } \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

同时，由于 $t=\tan\frac{x}{2}$，所以，当 x 由 $-\pi$ 变到 π 时，t 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$．故积分路径也变成了所期望的 $(-\infty,+\infty)$．于是，有

$$\int_0^{2\pi} Ra(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} Ra(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} Ra\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

至此，只须令 $t=\tan\frac{x}{2}$，即可将 3 型积分归结为计算 1 型积分的愿望变成现实．

综上所述，只须令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 或 $t=\tan\frac{x}{2}$，即可将 3 型积分的计算归结为已经解决过的积分类型．

在实践中，常用变换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 来计算 3 型积分．

【例 5.9】　试证 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2p\cos x+p^2}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{1-p^2},\ 0<p<1$

证　令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$，则 $\cos x=\frac{z^2+1}{2z},\quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$，当 x 由 0 变到 2π 时，可得 $C:|z|=1$．于是，有

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2p\cos x+p^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{i}}\oint_C\frac{1}{\left[-pz^2+\left(p^2+1\right)z-p\right]}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{i}}\oint_C\frac{1}{p\left(z-\frac{1}{p}\right)(z-p)}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{i}}2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{p\left(z-\frac{1}{p}\right)(z-p)},p\right)$$

$$=-2\pi\left(\lim_{z\to p}(z-p)\frac{1}{p\left(z-\frac{1}{p}\right)(z-p)}\right)$$

$$=\frac{2\pi}{1-p^2},\qquad 0<p<1$$

*5.4 对数留数与辐角原理

观察

$$\int_{|z|=2}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i} \text{ 与 } \int_{|z|=4}\frac{2z}{1+z^2}\mathrm{d}z=4\pi\mathrm{i}$$

发现它们的共同点是：

(1)等式左端均是复变函数沿围线的积分，且被积函数都是分式．同时，该分式的分子恰是分母的导数；

(2)等式右端均含 $2\pi\mathrm{i}$.

(3)等式左、右两端的联系由变形后的

$$\int_{|z|=2}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\times 1 \text{ 与 } \int_{|z|=4}\frac{2z}{1+z^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\times 2$$

可见：等式右端中与 $2\pi\mathrm{i}$ 相乘的 1 或 2，恰是左端中被积函数的分母 $z-1$ 或 $1+z^2$ 在积分路径内部的零点个数．这种联系是偶然现象还是必然规律？下面的定理 5.3 给予了回答．

5.4.1 对数留数

定理 5.3 设 C 是一围线，函数 $f(z)$ 在 C 内部有 m 个零点 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ ，它们的级为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ ；当 $z\in C$ 时， $f(z)\neq 0$ ；函数 $f(z)$ 在 C 内部有 n 个极点 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ ，它们的级为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ ；若函数 $f(z)$ 在 C 内部及 C 上除 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 外解析，则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-\sum_{l=1}^{n}\beta_l \tag{5.16}$$

式(5.16)的左端称为函数 $f(z)$ 关于围线 C 的**对数留数**．它提供了一种计算复变函数沿围线积分的方法．

若约定，将一个 α_j 级的零点算作 α_j 个零点，把一个 β_l 级的极点算作 β_l 个极点，则式(5.15)右端的差就是函数 $f(z)$ 在围线 C 的内部的零点个数与极点个数之差．

按上述约定，式(5.16)提供的计算积分的方法就更简单了．

例如，对于 $f(z)=z^{10}-1$ 而言，易得

$$\int_{|z|=4}\frac{10z^9}{z^{10}-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\times 10=20\pi\mathrm{i}$$

式(5.16)从“量”的方面揭示了函数 $f(z)$ 关于围线 C 的对数留数的特征，这里，自然会想，能否从“形”的角度来揭示它的特征呢？

下面的定理赋予了式(5.16)的一种几何解释．

定理 5.4 设有围线 C 与函数 $f(z)$ ，若 $f(z)$ 在 C 的内部及 C 上满足定理 5.3 的条件，则

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-\sum_{l=1}^{n}\beta_l=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z) \tag{5.17}$$

式中，$\Delta_C \arg f(z)$ 表示 z 沿 C 的正向绕行一周时，函数 $f(z)$ 的辐角改变量.

定理 5.4 称为**辐角原理**. 利用它可获得本节的中心内容儒歇定理.

5.4.2　儒歇定理及其应用

定理 5.5　设 C 是一围线，若函数 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 均在 C 的内部及 C 上解析，且满足

$$|\varphi(z)| < |f(z)|, \quad z \in C$$

则 $f(z)+\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 在 C 的内部的零点个数相同(一个 n 级零点算作 n 个零点).

证　由辐角原理，只须证

$$\Delta_C \arg\left[f(z)+\varphi(z)\right] = \Delta_C \arg f(z)$$

而

$$\begin{aligned}\Delta_C \arg\left[f(z)+\varphi(z)\right] &= \Delta_C \arg\left\{f(z)\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]\right\} \\ &= \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]\end{aligned}$$

所以，又只须证 $\Delta_C \arg\left[1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right]=0$ 即可.

为此，令

$$w = 1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}$$

于是

$$|w-1| = \left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|$$

由此可知，当 $z\in C$ 时，有 $|w-1|<1$.

这表明：当 z 沿 C 绕行一周时，相应的函数值 w 在圆 $|w-1|<1$ 内的一条围线 C' 上变化一周(见图 5.7). 由于这里的 C' 的内部不可能包含原点，所以

$$\Delta_C \arg\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right] = 0$$

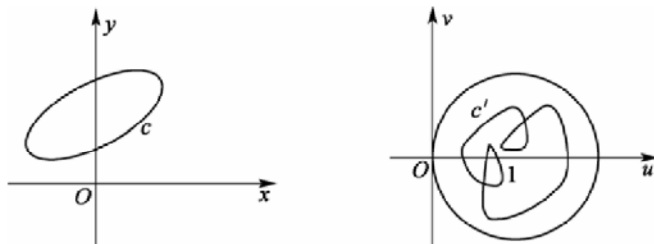


图 5.7

从而，有

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\left[f(z)+\varphi(z)\right] = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$$

即 $f(z)+\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 在 C 内部的零点个数相同.

定理 5.5 称为**儒歇定理**，也称为**零点个数比较定理**．它提供了一种判定解析函数的零点个数的方法.

【例 5.10】　试问函数 $g(z)=3z^8-7z^5-2z+1$ 在 $|z|<1$ 内有几个零点？

解　令

$$f(z)=-7z^5,\quad \varphi(z)=3z^8-2z+1$$

由于 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 均在 $|z|<1$ 上解析，且在 $|z|=1$ 上满足 $|\varphi(z)|<|f(z)|$，所以，由定理 5.5 可知，$g(z)$ 与 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的零点个数相同. 而 $f(z)=-7z^5$ 在 $|z|<1$ 内有 5 个零点(点 $z=0$ 为 $f(z)$ 的五级零点，按前面的约定算作 5 个零点)，故 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 5 个零点.

5.5　习　　题

1．设函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 满足下列条件之一：

(1) $z=z_0$ 分别是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 m 级与 n 级极点；

(2) $z=z_0$ 分别是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 m 级与 n 级零点；

(3) $f(z)$ 在 z_0 点解析或 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点或是极点，而 $z=z_0$ 是 $g(z)$ 的本性奇点.

试问：$f(z)+g(z)$，$f(z)g(z)$，$g(z)/f(z)$ 在 $z=z_0$ 处分别具有什么性质？

2．下列各函数有哪些孤立奇点？各属于哪一种类型？如果是极点，指出它的极点.

(1) $\dfrac{z+4}{z-z^3}$；

(2) $\dfrac{z-1}{z(z^2+2)^2}$；

(3) $\dfrac{\sin z}{z^3}$；

(4) $\dfrac{1}{\cos z+\sin z}$；

(5) $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+\mathrm{e}^z)}$；

(6) $\sin\dfrac{1}{z}$；

(7) $\mathrm{e}^{z-\frac{1}{z}}$；

(8) $\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$；

(9) $\dfrac{\ln(1+z)}{z}$；

(10) $\tan z$.

3．$z=0$ 是函数 $\dfrac{1}{(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^2}$ 的几级极点?

4．求证：如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $m(m\geqslant 2)$ 级零点，那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点.

5．如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，那么

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\text{(或两端均为}\infty\text{)}$$

6．求下列各函数在有限复平面内各孤立奇点处的留数.

(1) $\dfrac{e^z-1}{z}$;

(2) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

(3) $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$;

(4) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$;

(5) $\dfrac{1}{\sin z}$;

(6) $\tan z$;

(7) $\cos\dfrac{1}{z-2}$;

(8) $z^n\sin\dfrac{1}{z}$, (n 为正整数);

(9) $z^2e^{\frac{1}{z-1}}$;

(10) $\sin\dfrac{z}{z+1}$.

7．利用留数计算下列积分.

(1) $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{z^7}{(z-2)(z^2+1)}dz$;

(2) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{1}{z^3-z^5}dz$;

(3) $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{\sin z}{z}dz$;

(4) $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz$;

(5) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z}{\dfrac{1}{2}-\sin^2 z}\mathrm{d}z$；

(6) $\oint\limits_{|z|=1} (1+z+z^2)\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z$.

8．求下列函数在 ∞ 点的留数.

(1) $z+\dfrac{1}{z}$；

(2) $\cos z-\sin z$；

(3) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2-1}$；

(4) $\dfrac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$

(5) $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$；

(6) $\mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}}$.

9．利用 ∞ 点的留数计算下列积分.

(1) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z^2}{1+z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z$；

(2) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{(z^2+1)^2}{(z-1)^2(z^3-1)}\mathrm{d}z$；

(3) $\oint\limits_{|z|=2} (1+\sin\dfrac{1}{z})^n\mathrm{d}z$，($n$ 为自然数);

(4) $\oint\limits_{|z|=r} \dfrac{z^{2n}}{1+z^n}\mathrm{d}z$，($n$ 为自然数， $r>1$).

10．计算下列积分.

(1) $\int_0^{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta},(a>1)$；

(2) $\int_0^{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{5+3\sin\theta}$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2},(a>0)$；

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)(x^2+2x+2)}$；

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x\mathrm{d}x}{1+x^2}$；

(6) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin m\theta\mathrm{d}\theta}{5+4\cos\theta}$，（$m$ 为正整数）；

(7) $\int_0^{\pi}\frac{a\mathrm{d}\theta}{a^2+\sin^2\theta}$，$(a>0)$；

(8) $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$；

(9) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x\mathrm{d}x}{x^2-2x+10}$；

(10) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\pi x}{x(1-x^2)}\mathrm{d}x$.

11．证明：方程 $z^4+7z+1=0$ 有三个根位于圆环域 $1<|z|<2$ 内.

12．设 $\varphi(z)$ 在圆周 $C:|z|=1$ 上及其内部解析，且在 C 上 $|\varphi(z)|<1$，证明：在 C 内只有一个点 z_0，使 $\varphi(z_0)=z_0$.

13．试证：方程 $z^5-z+3=0$ 所有的根都位于圆环域 $1<|z|<2$ 内.

*第 6 章　共 形 映 射

教学提示：共形映射是从几何的角度来对解析函数的性质和应用进行讨论，这种方法可以把较为复杂区域上所讨论的问题转化到比较简单的区域上进行，在流体力学、电磁学、热传导理论等领域有广泛的应用.

教学目标：通过本章的教学，使学生了解解析函数的导数的几何意义及保角映射的概念；掌握 $w=z^{\alpha}$（α 为正有理数）和 $w=\mathrm{e}^{z}$ 的映射性质；掌握线性映射的性质和分式线性映射的保圆性及保对称性；会求一些简单区域(如平面、半平面、角形域、圆、带形域等)之间的保角映射.

6.1　解析函数的映射性质

6.1.1　解析函数的保域性与保角性

从几何的角度来探讨解析函数，会想到这样一个问题：若原象 G 为区域，则象 G' 是否仍为区域？对这个问题，可以给出一个结论(证明略)：

若函数 $w=f(z)$ 在区域 G 内解析，且不是一个常数，则 G 的象 $G'=f(G)$ 是区域.

这个结论表明：一个非常数的解析函数所作的映射具有保域性(将区域映射为区域).因此，该结论称为**保域性定理**.

下面从几何的角度来观察一下与 $w=f(z)$ 相关的一些量的解释.

(1)线倾角的复数表示.

设 C 是一条连续曲线，其方程为

$$z=z(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

若 $z'(t)\neq 0,\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$，则在曲线 C 上的点 $z_0=z(t_0)$ 处的切线存在，且此切线的倾角为 $\mathrm{Arg}z'(t_0)$.

事实上，如图 6.1 所示，若规定割线 z_0z 的正方向对应于 t 增大的方向，则此方向与向量 $\dfrac{z-z_0}{t-t_0}$ 的方向相同．由此可知，向量 $\dfrac{z-z_0}{t-t_0}$ 的辐角 $\mathrm{Arg}\dfrac{z-z_0}{t-t_0}$ 与割线 z_0z 的倾角相等，而

$$\lim_{t\to t_0}\frac{z-z_0}{t-t_0}=z'(t_0),\quad z'(t_0)\neq 0$$

故

$$\lim_{t\to t_0}\operatorname{Arg}\frac{z-z_0}{t-t_0}=\operatorname{Arg}z'(t_0)$$

即在曲线 C 上的点 $z_0=z(t_0)$ 处的切线存在，且此切线的倾角为 $\operatorname{Arg}z'(t_0)$，从而便获得切线的倾角的复数表示.

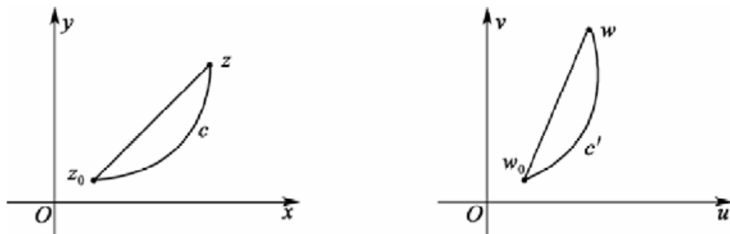


图 6.1

(2) $\operatorname{Arg}f'(z_0)$ 的几何意义.

设 G 是区域，函数 $w=f(z)$ 在 G 内连续，对于 $z_0\in G$，有 $f'(z_0)\neq 0$．如图 6.1 所示，C 为一条从点 z_0 出发的连续曲线，其方程为

$$z=z(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1,\quad z_1=z(t_0)$$

若设 $z'(t_0)\neq 0$，则由前面(1)的讨论知道，曲线 C 在点 z_0 必有切线，且此切线的倾角为 $\operatorname{Arg}z'(t_0)$.

若曲线 C 经 $w=f(z)$ 映射后的象为曲线 C'，则 $C'=f(C)$ 的方程为

$$w=f\left[z(t)\right],\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1,\quad w_0=w(t_0)=f\left[z(t_0)\right]$$

由于

$$w'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0),\quad z'(t_0)\neq 0$$

所以，曲线 C' 在 $w_0=f(z_0)$ 处有切线，且该切线的倾角为

$$\operatorname{Arg}w'(t_0)=\operatorname{Arg}f'(z_0)+\operatorname{Arg}z'(t_0)\tag{6.1}$$

式(6.1)表明，像曲线 C' 在点 $w_0=f(z_0)$ 处的切线可由原象曲线 C 在点 z_0 的切线旋转一个角度 $\operatorname{Arg}f'(z_0)$ (中的一个)而得到(这里，假定 z 平面与 w 平面重合，且使 x 轴与 u 轴，y 轴与 v 轴正方向相同，并设点 w_0 与 z_0 重合).

由此，**称 $\operatorname{Arg}f'(z_0)$ 为映射 $w=f(z)$ 在点 z_0 处的旋转角**．易知，旋转角只依赖于点 z_0，而与曲线 C 的形状和方向无关．称旋转角的这种性质为**旋转角不变性**.

至此可知，**$\operatorname{Arg}f'(z_0)$ 的几何意义是映射 $w=f(z)$ 在点 z_0 处的旋转角，且此旋转角具有旋转角不变性.**

由旋转角不变性立即可获得一个重要性质：**对于连续函数 $w=f(z)$，$z\in G$，若 $f'(z_0)\neq 0$，$z_0\in G$，则过点 z_0 具有切线的任意两条有向连续曲线 C_1 与 C_2 的夹角**(二曲线在点 z_0 的切线所夹的角)**与象曲线在点 $w_0=f(z_0)$ 的夹角保持大小相等且方向相同**(即由原象曲线 C_1 到 C_2 的旋转方向与由象曲线 C_1' 到 C_2' 的旋转方向是一致的)．该性质称为**保角性.**

(3)$|f'(z_0)|$的几何意义.

在与讨论(2)时所作假设相同的条件下，容易得到

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \neq 0$$

上式表明，象曲线C'上从$w_0 = f(z_0)$出发的无穷小的弦长与原象曲线C上从z_0出发的所对应的无穷小的弦长之比的极限不为零．因此，称$|f'(z_0)|$**为映射**$w = f(z)$**在点**z_0**的伸缩率**．显然，这伸缩率只依赖于点z_0，而与曲线C的形状及方向无关，这种性质称为**伸缩率的不变性**.

至此可知，$|f'(z_0)|$**的几何意义是映射**$w = f(z)$**在点**z_0**的伸缩率，且此伸缩率具有伸缩率不变性.**

设映射$w = f(z)$在区域G内连续，若它使通过点$z_0 \in G$的任意两个有向连续曲线间的夹角的大小及方向保持不变，则称该映射在点z_0是**保角的**.

若映射$w = f(z)$在区域G内的每一点都是保角的，则称该映射为区域G内的**保角映射**，或称该映射在G内是保角的.

6.1.2　共形映射概念

若函数$w = f(z)$在z_0的邻域内是一一的，且在z_0具有保角性和伸缩率不变性，则称映射$w = f(z)$在z_0是共形的，或称$w = f(z)$在z_0是共形映射．若映射$w = f(z)$在区域G内每一点都是共形的，则称该映射为区域G内的**共形映射**，或称该映射在G内是共形的.

简单地说，若映射$w = f(z)$在区域G内是单叶且保角的，则称该映射为区域G内的**共形映射**.

由以上讨论可得出结论：**若函数**$w = f(z)$**在区域**G**内解析，则它在导数不为零处是保角的.**

由于在区域G内的单叶解析函数$w = f(z)$，具有$f'(z_0) \neq 0 (z_0 \in G)$的性质(可作为练习，试证一下)，于是可得：**若函数**$w = f(z)$**在区域**G**内单叶且解析，则它在**G**内是保角的.**

进而还可以得到：若函数$w = f(z)$在区域G内单叶且解析，则

(1)$w = f(z)$是区域G内的共形映射，且G的象$G' = f(G)$为区域；

(2)$w = f(z)$的反函数$z = f^{-1}(w)$在G'内单叶且解析，并有

$$f^{-1'}(z_0) = \frac{1}{f'(z_0)}, \quad z_0 \in G, \quad w_0 = f(z_0) \in G'$$

将前面的讨论总结一下，有下述结论。

定理 6.1　若函数$w = f(z)$在z_0解析，且$f'(z_0) \neq 0$，则映射$w = f(z)$是共形的，而且$\mathrm{Arg} f'(z_0)$表示这个映射在z_0的旋转角，$|f'(z_0)|$表示这个映射在z_0的伸缩率．如果解析函数$w = f(z)$在G内处处有$f'(z_0) \neq 0$，则映射$w = f(z)$是G内的共形映射.

6.2　几个初等函数的映射性质

6.2.1　函数 $w=z+h$ (h 为常数)的映射性质

(1)是平移变换.

事实上，若令 $z=x+\mathrm{i}y,\quad w=u+\mathrm{i}v,\quad h=a+\mathrm{i}b$，则有 $\begin{cases}u=x+a\\ v=y+b\end{cases}$

由此易知，$w=z+h$ 是一个平移变换.

(2)在复平面处处是保角的. 这是因为，在复平面上处处有 $w'=1\neq 0$.

(3)将圆周映射为圆周.

6.2.2　函数 $w=kz$　(k 为常数，且 $k\neq 0$)的映射性质

(1)是旋转与伸长(或缩短)变换的叠加.

事实上，若令 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\quad w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\quad k=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$，

则有

$$\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=rR\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta_0)},$$

从而有

$$\begin{aligned}&\rho=rR\\&\varphi=(\theta+\theta_0)+2m\pi\end{aligned}\quad ,\ m\text{ 为整数}$$

于是，由 z 得到 w 的过程可视为：先将 z 旋转一个角度 θ_0，然后，再将 $|z|=r$ 伸长(或缩短)到 R 倍，便可由 z 获得 $w=kz$.

(2)在复平面上处处是保角的. 这是因为，$w'=k\neq 0$ 在复平面上处处成立.

为了下面讨论方便，先给出关于圆周对称点的概念.

设有圆周 $C:|z-a|=R$，若有两点 z_1 与 z_2 均在同一条始于圆心 a 的射线上，并满足

$$|z_1-a|\cdot|z_2-a|=R^2$$

则称**点 z_1 与 z_2 关于圆周 C 是对称的.** 此时，也称点 z_1 与 z_2 是关于圆周 C 的**对称点**. 特别地，规定圆心 a 与点∞是关于圆周 C 的对称点.

6.2.3　函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 的映射性质

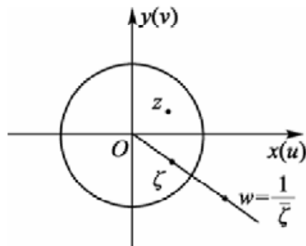


图 6.2

(1)该映射称为反演变换或倒数变换，它是相继施行两个对称变换的结果：一是关于实轴对称；二是关于单位圆周对称.

事实上，将 z 平面与 w 平面(如图 6.2)所示重合后，若令 $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{R}e^{-i\theta}$$

它可视为$\zeta=\overline{z}=Re^{-i\theta}$与$w=\dfrac{1}{\zeta}$复合而成，亦即由$z=Re^{i\theta}$映射为$w=\dfrac{1}{R}e^{-i\theta}$的过程可视为：①先将$Re^{i\theta}$映射为$Re^{-i\theta}$；②再将$Re^{-i\theta}$映射为$\dfrac{1}{R}e^{-i\theta}$．而①是关于实轴的对称变换，②是关于单位圆周的对称变换．

(2)在复平面上除$z=0$外，处处是保角的．这是因为$\omega'=-\dfrac{1}{z^2}$在去掉点$z=0$后处处不等于零．

(3)将圆周映射为圆周．

事实上，若设$z=x+iy,\quad w=u+iv$，则将它们代入$w=\dfrac{1}{z}$中，经整理得

$$\begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

于是，z平面上的圆周(或直线)$A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0$依上述对应关系得到在$\omega$平面上的象为

$$A\frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}+B\frac{u}{u^2+v^2}-C\frac{v}{u^2+v^2}+D=0$$

即

$$D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0$$

由上式可知，映射$w=\dfrac{1}{z}$，当$A\neq 0$，$D\neq 0$时，将圆周映射为圆周；当$A\neq 0,\quad D=0$时，将圆周映射为直线；当$A=0,\quad D\neq 0$时，将直线映射为圆周；当$A=0,\quad D=0$时，将直线映射为直线．

基于此，若约定：将直线理解成半径为无穷大的圆周，则便可说反演变换具有保圆周性或保圆性，即$w=1/z$将圆周映射为圆周．

6.2.4 幂函数与根式函数的映射性质

1．幂函数

$$w=z^n,\quad n\text{为大于1的自然数}$$

(1)设G为射线$\arg z=\theta_0$，求经$w=z^n$映射后的象G'．

为确定G'，首先，令$z=re^{i\theta},\quad w=Re^{i\varphi}$

其次，将z与w代入$w=z^n$中，得

$$\begin{cases} R = r^n \\ \varphi = n\theta \end{cases}$$

这里，在第二个等式的右端略去了 $2k\pi$ (k 为整数)，其原因是不会改变象的位置，或者说，这样做不会影响象的确定.

最后，由 G 确定 G'．因 G 为 z 平面上的映射线 $\arg z = \theta_0$．所以，有 $\varphi = n\theta_0$ 故 G' 为 w 平面上的射线 $\arg w = n\theta_0$．

(2)设 G 为圆周 $|z| = r_0$，求经 $w = z^n$ 映射后的象 G'．

前两个步骤与(1)同，现在来确定 G'．由于，G 为圆周 $|z| = r_0$，所以，有

$$R = r_0^n$$

故 G' 为 w 平面上的圆周 $|w| = r_0^n$．

(3) $w = z^n$ 将模相同而辐角相差 $\dfrac{2\pi}{n}$ 的整数倍的点 z_1 与 z_2 映射为同一点.

(4) $w = z^n$ 将

$$G_k : k\frac{2\pi}{n} < \arg z < (k+1)\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n-1$$

映射为 $G' : 0 < \arg w < 2\pi$．

这里的 G' 即为从原点起沿正实轴剪开的 w 平面(见图 6.3).

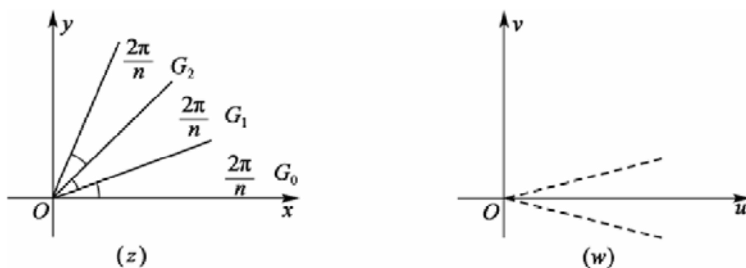


图 6.3

由于 G_k 与 G' 均可视为一种角形区域，所以，该性质表明，幂函数具有将角形区域的张角扩大的映射性质.

易知，每一个 G_k $(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$ 都是 $w = z^n$ 的单叶性区域.

2. 根式函数

$$w = \sqrt[n]{z}, \quad n \text{为大于 1 的自然数}$$

因为 $w = z^n$ 在 G_k $(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$ 内单叶、解析，所以其反函数 $w = \sqrt[n]{z}$ 在 $k = 0,1,2,\cdots,n-1$ 时的单值支 z_k 在 G' 内均为单叶、解析的函数，且这些单值支分别将 G' 映射为 $G_0, G_1, \cdots, G_{n-1}$ (见图 6.3).

由此可知，根式函数的每个单值支具有将角形区域(如 G' 那样)的张角缩小的映射性质.

6.2.5 指数函数与对数函数的映射性质

1. 指数函数

$$w = \mathrm{e}^z$$

(1)设 G 为平行于实轴的直线 $y = y_0$，求经 $w = \mathrm{e}^z$ 映射后的象 G'.

为确定 G'，首先，令 $z = x + \mathrm{i}y$, $w = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

其次，将上面所设的 z 与 w 代入 $w = \mathrm{e}^z$，得对应规律

$$\begin{cases} \rho = \mathrm{e}^x \\ \varphi = y \end{cases}$$

这里，出自与幂函数相同的原因，在写第二个等式时略去了 $2k\pi$ (k 为整数).

最后，由 G 确定 G'. 由于 G 为直线 $y = y_0$，所以，得 $\varphi = y_0$，故 G' 为 w 平面上的一条始于原点的射线 $\varphi = y_0$.

(2)设 G 为线段：$x = x_0, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$，求经 $w = \mathrm{e}^z$ 映射后的象 G'.

前两个步骤同(1)，现在由 G 确定 G'. 由于 G 为线段：$x = x_0, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$，所以，由对应规律得 $\rho = \mathrm{e}^{x_0}, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$，故 G' 为圆周 $|w| = \mathrm{e}^{x_0}$.

(3)设 G_k 为：$-\infty < x < +\infty, 2k\pi \leqslant y \leqslant 2(k+1)\pi$, k 为整数，求经 $w = \mathrm{e}^z$ 映射后的象 G'.

前两个步骤同(1)，现在由 G 确定 G'. 由 G_k 中的 x 与 y 的取值范围可得 G' 的 ρ 与 φ 的取值范围是：

$0 < \rho < +\infty$，$2k\pi < \varphi < 2(k+1)\pi$，$k$ 为整数.

由此可知，G' 为 w 平面上从原点起始沿正实轴剪开的 w 平面(见图 6.4).

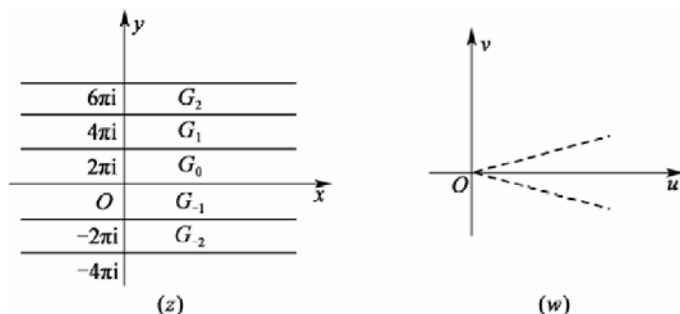


图 6.4

2. 对数函数

$$z = \mathrm{Ln}w$$

由指数 $w = \mathrm{e}^z$ 在 G_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 内单叶、解析，可知，其反函数 $z = \mathrm{Ln}w$ 在 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时的单值支 z_k 在 G' 内均为单叶、解析函数，且这些单值支分别将 G' 映射为 $G_0, G_1, G_{-1}, G_2, G_{-2}, \cdots$ (见图 6.4).

由此可见，对数函数的每个单值支具有将角形区域(如 G' 那样)映射成平行于实轴的带

形区域(见图 6.4)的映射性质.

6.2.6　茹科夫斯基函数的映射性质

茹科夫斯基函数：
$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{6.2}$$

(1)将圆周$|z|=r(>1)$映射为椭圆周.

首先，令$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$w=u+\mathrm{i}v$.

其次，将所设z与w代入式(6.2)得对应规律

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases} \tag{6.3}$$

最后，定象．由式(6.3)容易得到象的坐标满足

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1$$

由此可知，圆周$|z|=r(>1)$的象为w平面上的椭圆周，其长半轴为$\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$，短半轴为$\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$，焦点为$(-1,0)$与$(1,0)$.

并且，由于$r>1$，所以，当z沿圆周$|z|=r$的正向绕行一周(即θ由 0 变化到2π)时，其象也沿椭圆周的正向绕行一周.

(2)将$G:|z|>1$映射为G'：去掉线段$[-1,1]$的w平面.

事实上，可将G视为由无穷个圆周$|z|=r(>1)$组成的集合，因此，为了求G'，只须确定这无穷个圆周的象即可.

基于(1)的讨论，知道这无穷个圆周的象是无穷个椭圆周，并且当$r(r>1)\to 1$时，有

$$\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\to 1,\quad \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\to 0$$

即椭圆周的长半轴趋向 1，而短半轴趋向 0，因而相应的椭圆周便退化为w平面上的线段$[-1,1]$；又当$r\to+\infty$时，有

$$\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\to+\infty,\quad \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\to+\infty$$

即相应的椭圆周越来越大，以至扫过去掉线段$[-1,1]$的w平面.

综上所述，函数$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$将$G:|z|>1$映射为$G'$：去掉线段$[-1,1]$的$w$平面.

6.2.7　分式线性变换的映射性质

称变换

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \tag{6.4}$$

为分式线性变换，其中的a,b,c,d为复常数，且$ad-bc\neq 0$.

先弄清式(6.4)的“结构”.

当$c=0$时，式(6.4)变为

$$w=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d} \tag{6.5}$$

当$c\neq 0$时，式(6.4)变为

$$\begin{aligned} w&=\frac{c(az+b)+ad-ad}{c(cz+d)}\\ &=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d} \end{aligned} \tag{6.6}$$

若令　$E=\frac{a}{d},F=\frac{b}{d}$，则式(6.5)成为

$$w=Ez+F$$

这可视作前面讨论过的映射 1($w=z+h$)与映射 2($w=kz$)的复合.

又若令$A=\frac{a}{c},\quad B=\frac{bc-ad}{c},\quad \zeta=cz,\quad \eta=\zeta+d,\quad \xi=\frac{1}{\eta}$，则式(6.6)可视作由映射

$$w=A+B\xi,\quad \xi=\frac{1}{\eta},\quad \eta=\zeta+d,\quad \zeta=cz$$

复合而成，而这四种映射就是前面讨论过的映射 1($w=z+h$)、映射 2($w=kz$)、映射 3($w=\frac{1}{z}$)或是映射 1 与映射 2 的复合.

综上所述，式(6.4)的“结构”是由平移变换、旋转与伸长(或缩短)变换及反演变换复合而成.

为便于研究分式线性变换在扩充复平面的性质，约定：

当$c\neq 0$时，在点$z=-\frac{d}{c}$处规定$w=\infty$，在点$z=\infty$处规定$w=\frac{a}{c}$；

当$c=0$时，在点$z=\infty$处规定$w=\infty$.

同时，约定：两条曲线在点$z=\infty$的夹角α，是指在反演变换下这两条曲线的象曲线在原点的夹角为α. 依此约定，若考虑z平面上相交于点$z=\infty$处的两条曲线C_1与C_2的夹角时，则总是考虑在变换$\zeta=\frac{1}{z}$下曲线C_1与C_2的象曲线C_1'与C_2'在ζ平面上的点$\zeta=0$处的夹角，即用C_1'与C_2'在点$\zeta=0$处的夹角充当C_1与C_2在点$z=\infty$的夹角.

最后，约定：在扩充复平面上将直线视作圆周(一个过无穷远点的特殊圆周).

下面讨论分式线性变换的映射性质．为此，先对映射 1、映射 2、映射 3 的映射性质进行讨论，进而得出一般分式线性映射的性质．

1)保形性

$w=kz+h\,(k\neq 0)$在扩充复平面是保角的．

因为$w'=k\neq 0$，所以在点$z\neq\infty$处$w=kz+h$是保角的．

其次，$w=kz+h$在点 $z=\infty$也是保角的．

事实上，由于当$z=\infty$时，$w=\infty$，所以，按约定，考虑在点$z=\infty$与点$w=\infty$处的二曲线的夹角时，需同时对z与w引入两个反演变换，设$\zeta=\dfrac{1}{z}$，　$\eta=\dfrac{1}{w}$．

由此，$w=kz+h$便成为 $\eta=\dfrac{\zeta}{h\zeta+k}$

由于 $\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\zeta}\Big|_{\zeta=0}=\dfrac{h\zeta+k-h\zeta}{(h\zeta+k)^2}\Big|_{\zeta=0}=\dfrac{1}{k}\neq 0$

所以，$\eta=\dfrac{\zeta}{h\zeta+k}$在$\zeta=0$处是保角的，从而，$w=kz+h$在点$z=\infty$是保角的．

综上所述，$w=kz+h$在扩充复平面是保角的．

反演变换$w=\dfrac{1}{z}$在扩充复平面是保角的．

当$z\neq 0$时，因为$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{1}{z^2}\neq 0$，所以$w=\dfrac{1}{z}$在$z\neq 0$及$z\neq\infty$处是保角的．

其次，$w=\dfrac{1}{z}$在$z=0$处是保角的．

事实上，由于当$z=0$时，$w=\infty$，所以，按约定，引入变换

$$\eta=\frac{1}{w}$$

于是，$w=\dfrac{1}{z}$便成为$\eta=z$，显然，$\eta=z$在点$z=0$处是保角的，可知$w=\dfrac{1}{z}$在点$z=0$处是保角的．

最后，$w=\dfrac{1}{z}$在点$z=0$处是保角的．按约定，引入变换$\zeta=\dfrac{1}{z}$后，得$w=\zeta$，显然，$w=\zeta$在$\zeta=0$处是保角的，从而知道，$w=\dfrac{1}{z}$在点$z=\infty$处是保角的．

综上所述，$w=\dfrac{1}{z}$在扩充复平面是保角的．

由于分式线性变换在扩充复平面是单叶的，且它是由前面讨论的映射 1、映射 2、映射 3 复合而成，所以，可得下面的定理．

定理 6.2　分式线性变换在扩充复平面是保形的．

2)保圆周性

定理 6.3　分式线性变换将扩充复平面上的圆周或直线映射为扩充复平面上的圆周或

直线.

3)保对称点性

在扩充复平面上的两点 z_1 与 z_2 是关于圆周 C 的对称点的充要条件是通过 z_1 与 z_2 的任何圆周与圆周 C 正交.

事实上，若 C 是直线，通过 C 的两个对称点 z_1 与 z_2 的任何圆周显然与 C 正交；

若 C 是半径为有限的圆但 z_1 与 z_2 之中有一个是无穷远点，那么通过 z_1 与 z_2 的任何圆周也就是直线，显然与 C 也正交；

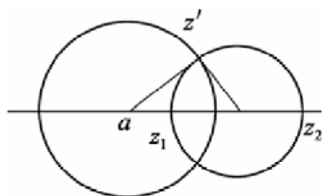


图 6.5

若 C 是半径为有限的圆 $|z-a|=R$，且 z_1 与 z_2 是关于 C 对称的两个有限远点，则通过 z_1 与 z_2 的直线(半径为无穷大的圆周)显然与 C 正交.作过 z_1 与 z_2 的任一半径为有限的圆 Γ (见图 6.5)，过 a 点作圆 Γ 的切线，设切点为 z'，由平面几何学的切割线定理可知，切线段长度的平方等于割线长度 $|z_2-a|$ 与割线在圆 Γ 外延长线长度 $|z_1-a|$ 的乘积，即

$$|z'-a|^2=|z_1-a|\cdot|z_2-a|$$

由对称点的概念，有 $|z'-a|=R$，这表明切点为 z' 在圆周 C 上，即圆 Γ 的切线恰好过圆 C 的半径，因此圆 C 与圆 Γ 正交.

反过来，作过 z_1 与 z_2 的任一半径为有限的圆 Γ，与圆 C 交于一点，由于圆 C 与圆 Γ 正交，Γ 在 z' 的切线通过圆 C 的圆心 a，显然 z_1 与 z_2 在这切线的同一侧. 又过 z_1 与 z_2 作一直线 L (半径为无穷大的圆)，由于 L 与圆 C 正交，故 L 通过圆 C 的圆心 a，于是 z_1 与 z_2 在通过 a 的一条射线上，由切割线定理得

$$|z_1-a|\cdot|z_2-a|=|z'-a|^2=R^2$$

即 z_1 与 z_2 是关于 C 的对称点.

由上述结论，可得：

定理 6.4　设 $w=f(z)$ 为分式线性变换，若扩充 z 平面上两点 z_1 与 z_2 关于圆周 C 对称，则 $w_1=f(z_1)$ 与 $w_2=f(z_2)$ 两点关于圆周 $C'=f(C)$ 对称.

事实上，设 Γ' 是通过 w_1 与 w_2 的任意一个圆周，则其原象 Γ 是过 z_1 与 z_2 的圆周，由 z_1 与 z_2 关于 C 对称，有 Γ 与 C 正交，再由分式线性映射的保角性知 Γ' 与 C' 正交，即过 w_1 与 w_2 的任意一个圆与 C' 正交，因此 w_1 与 w_2 关于 Γ 对称.

4)保交比性

若 z_1,z_2,z_3,z_4 为扩充复平面上彼此互异的四点，则称

$$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

为这四点的**交比**(或**非调和比**)，记作 (z_1,z_2,z_3,z_4)，即

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \tag{6.7}$$

对于式(6.7)，约定：在 z_1, z_2, z_3, z_4 四点中，若有一点为 ∞，则式(6.7)中含该点的项用 1 代替. 例如，$(z_1, \infty, z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_1}{1} : \frac{z_3 - z_1}{1} = \frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1}$.

由交比的概念，很容易得到下面的定理.

定理 6.5　若有分式线性变换 $w = \frac{az+b}{cz+d}$，则

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

其中，$w_k = \frac{az_k + b}{cz_k + d}$，$k = 1, 2, 3, 4$.

定理 6.5 表明，分式线性变换具有保交比性.

定理 6.6　若分式性性变换将扩充复平面(z 平面)上 3 个互异的点 z_1, z_2, z_3 映射为扩充复平面(w 平面)上的三点 w_1, w_2, w_3，则此分式线性变换就唯一确定，且可写成

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \tag{6.8}$$

定理 6.6 表明，由三对对应点即可唯一确定一个分式线性映射. 在写式(6.8)时，其中若出现有的点为 ∞ 时，则仍按式(6.7)后的约定处理.

【例 6.1】　试求将点 $\infty, 0, 1$ 分别映射为点 $0, 1, \infty$ 的分式线性变换.

解　令 $z_1 = \infty, z_2 = 0, z_3 = 1$，$w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \infty$，则由式(6.8)得

$$w = \frac{1}{1-z}$$

即为所求.

6.3　共形映射的基本问题举例

6.3.1　共形映射的基本问题

共形映射的基本问题是：对任意给定的两个单连通区域 G 与 G'，是否存在一个单叶、解析函数能将 G 保形地映射成 $G' = f(G)$？若存在，是否唯一.

定理 6.7　若 G 为扩充复平面上的一个单连通区域，其边界点不止一点，则必存在单叶、解析函数 $w = f(z)$ 将 G 映射为单位圆 D；又若对 G 内某一点 a 满足条件

$$f(a) = 0 \text{ 且 } f'(a) > 0$$

则函数 $w = f(z)$ 是唯一的. (证明略)

定理 6.7 称为**黎曼定理**，它为共形映射的基本问题提供了答案.

定理 6.8　设单连通区域 G 与 G' 分别是简单闭曲线 C 与 C' 的内部，若函数 $w=f(z)$ 在 $\overline{G}=G+C$ 上解析，且将 C 双方单值的映射为 C'，则函数 $w=f(z)$ 在 G 内单叶且将 G 映射为 C'(证明略).

定理 6.8 称为**边界对应定理**，它将区域问题变为考查察边界问题，解决了 $w=f(z)$ 怎么找的问题.

6.3.2　例子

【例 6.2】　求将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射为单位圆 $|w|<1$ 的分式线性变换，且使点 $z=\alpha(\operatorname{Im}\alpha>0)$ 映射为点 $w=0$ (见图 6.6).

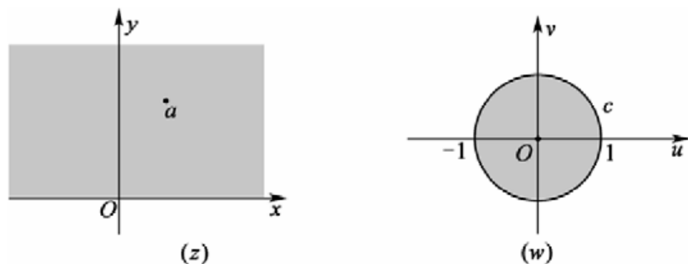


图 6.6

解　用构造法. 依题意，所求映射应将 z 平面上的实轴映射为 w 平面上的单位圆周 $C:|w|=1$.

由于要求将点 $z=\alpha$ 映射为点 $w=0$，而关于 z 平面上的实轴与点 α 对称的点是 $\overline{\alpha}$，关于 w 平面上的圆周 C 与点 $w=0$ 对称的点是 ∞，所以，由分式线性变换具有保对称点性可知，拟求映射除应将点 $z=\alpha$ 映射为点 $w=0$ 外，还应将点 $\overline{z}=\overline{\alpha}$ 映射为点 $w=\infty$. 又因所求映射是分式线性变换，故可构造为

$$w=k\cdot\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}，\ k \text{ 为待定系数}$$

为确定 k，只须利用该变换需将实轴上的点 $z=x$ 映射为单位圆周 $C:|w|=1$ 上的点的事实，即当 $z=x$ 时，有 $|w|=\left|k\cdot\frac{x-\alpha}{x-\overline{\alpha}}\right|=|k|=1$. 由此得 $k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\theta$ 为任意实数.

至此，便得

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}},\quad \operatorname{Im}\alpha>0,\qquad \theta \text{ 为任意实数} \tag{6.9}$$

经验证，式(6.9)即为所求.

事实上，当 $z=x$ 时，由式(6.9)得

$$|w|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\right|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|\cdot\left|\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\right|=1$$

又式(6.9)是分式线性变换，故式(6.9)将 z 平面上的实轴(上半平面的边界)映射为 w 平面

上的圆周$|w|=1$(单位圆的边界).

又由于当$z=\alpha$时，由式(6.9)得$w=0$，而该点位于圆$|w|<1$中，所以，由保域性定理可知，式(6.9)将$\operatorname{Im}z>0$映射为$|w|<1$，且将点$z=\alpha$($\operatorname{Im}z>0$)映射为点$w=0$．至于式(6.9)是分式线性变换是明显的，故式(6.9)即为所求.

【例 6.3】 求将$|z|<1$映射为$|w|<1$的分式线性变换，使得点$z=\alpha$ ($|\alpha|<1$)映射为点$w=0$(见图 6.7).

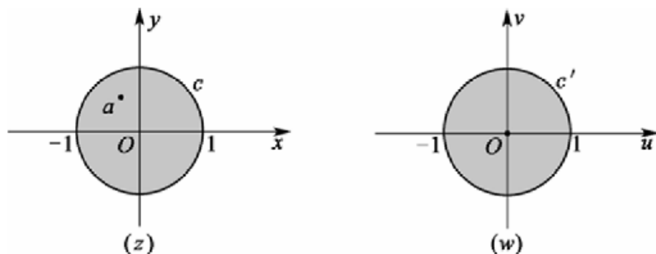


图 6.7

解 用构造法．依题意，所求映射应将z平面上的单位圆周$C:|z|=1$映射为w平面上的单位圆周$C':|w|=1$.

由于要求将点$z=\alpha$($\operatorname{Im}z>0$)映射为点$w=0$，而关于圆周C与点α对称的点是$\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$(见图 6.2)，关于圆周$C'$与点$w=0$对称的点是$\infty$，所以，由分式线性变换具有保对称点性可知，所求变换应将点$z=\alpha$映射为点$w=0$，且将点$z=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$映射为点$w=\infty$，又因所求变换是分式线性变换，故可构造为

$$w=k'\cdot\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}},\quad k'\text{为待定系数}$$

即

$$w=-\overline{\alpha}k'\cdot\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

令$k=1-\overline{\alpha}k'$，得

$$w=k\cdot\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},\quad k\text{为待定系数}$$

为确定k，利用C上的点的象一定位于C'上的事实，不失一般性，可取点$z=1$代入上式后应满足$|w|=1$，即

$$|w|=|k|\cdot\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}}\right|=|k|=1$$

于是，$k=\mathrm{e}^{i\theta}$，k为任意实数.

于是，经验证

$$w = e^{i\theta} \cdot \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \quad |\alpha|<1, \quad \theta \text{为任意实数}$$

即为所求.

【例 6.4】 设 z 平面上有两条圆弧 $\widehat{aEb}$ 与 $\widehat{aFb}$，这两条圆弧相交于点 a 与点 b，且它们在点处 a 的夹角为 θ，试求将这两条圆弧映射为扩充复平面(w 平面)上发自点 $w=0$ 的两条射线(见图 6.8)的分式线性变换.

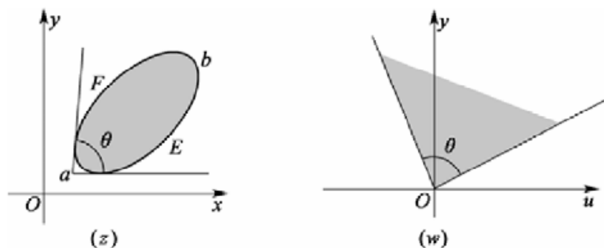


图 6.8

解 用构造法. 由于自点 $w=0$ 出发的两条射线可视为在点 $w=\infty$ 相交，所以，依题意，不失一般性可构造一个使点 $z=a$ 映射为点 $w=0$，且使点 $z=b$ 映射为点 $w=\infty$ 的分式线性变换

$$w = \frac{z-a}{z-b} \tag{6.10}$$

经验证，即为所求.

上述三例是利用一个已知变换(分式线性变换)的映射性质，采取构造的方法求出将区域 G 映射为指定区域 G'的变换 $w=f(z)$的. 但对某些区域 G 与 G'而言，单靠这种构造的方法是不能奏效的，而要利用多个已知变换的映射性质，连续映射后才能将所需的变换 $w=f(z)$求出. 当然，这并不排斥在此过程中的某些步骤采用构造的方法.

【例 6.5】 设 G 为 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{6}$，G'为 $|w|<1$，试求将 G 映射为 G'的变换.

解 首先，通过 $z_1 = z^6$ 将 G 映射为 z_1 平面上的区域 G_1:$\mathrm{Im}z_1>0$.

其次，再通过 $w=\dfrac{z_1-i}{z_1+i}$ (在例 6.2 中，取 $\theta=0$，$\alpha=i$)将 G_1 映射为 G'(见图 6.9).

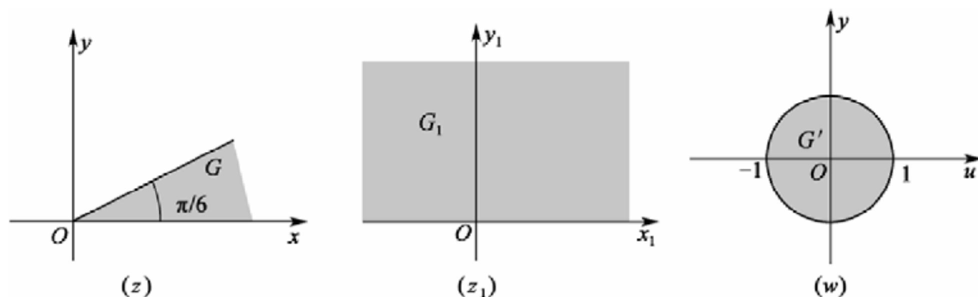


图 6.9

最后，将 $w=\dfrac{z_1-\mathrm{i}}{z_1+\mathrm{i}}$ 与 $z_1=z^6$ 复合得 $w=\dfrac{z^6-\mathrm{i}}{z^6+\mathrm{i}}$.

经验证，该变换即为所求.

【例 6.6】 试求将 $G:\mathrm{Im}\,z>0,\quad |z|<1$ 映射为 $G':\mathrm{Im}\,w>0$ 的变换(见图 6.10).

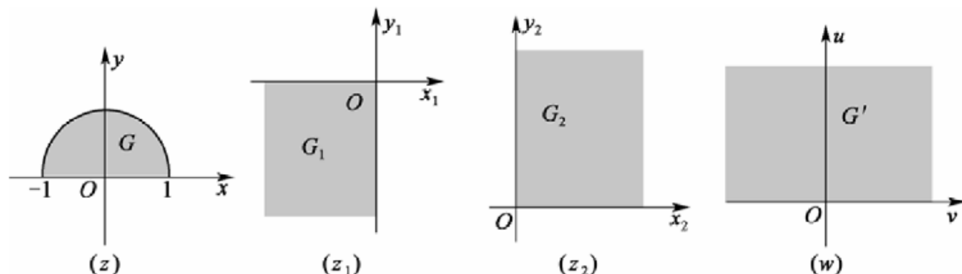


图 6.10

解 由于将第一象限映射为 G' 的变换容易求得(只须用幂函数)，而 G 可视作由两条圆弧围成的(将 $[-1,1]$ 视作“弧”). 这两条圆弧可经已知变换(例 6.4)映射为自原点出发的两条射线，而由这两条射线可围成一角域，又第一象限也是一个角域. 这样一来，如果能找到这两个角域之间的联系，那么，将 G 映射为 G' 的变换也就可以求得了.

因此，首先，设法将 G 映射为一个角域. 在例 6.4 中，取 $a=-1,\quad b=1$，作出

$$z_1=\frac{z+1}{z-1}$$

经验证，该变换将 G 映射为 z_1 平面上的 G_1(z_1 平面上的第三象限).

事实上，由于该变换是分式线性变换，且将点 $z=-1$ 映射为点 $z_1=0$，将点 $z=1$ 映射为点 $z_1=\infty$，所以，由分式线性变换的保圆周性可知，G 的边界的象在 z_1 平面上是自原点 $z_1=0$ 出发的两条射线. 为了确定这两条射线的位置，分别在 $[-1,1]$ 与上半个单位圆周上取出点 $z=0$ 与点 $z=\mathrm{i}$，求得它们的象分别为 $z_1=-1$ 与 $z_1=-\mathrm{i}$，于是，该变换将 $[-1,1]$ 上的三点 $-1,0,1$ 依次映射为 $0,-1,\infty$，即将 $[-1,1]$ 映射为负实轴；将上半个单位圆周映射为负虚轴. 从而 G_1 是 z_1 平面上的负实轴与负虚轴围成. 为确定 G_1 的准确位置，可在 G 内取一点 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{2}$，代入 $z_1=\dfrac{z+1}{z-1}$ 中得其象为 $z_1=\dfrac{-3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$，由于该点位于 z_1 平面的第三象限中，所以，由保域性定理断定 G_1 只能是 z_1 平面的第三象限.

其次，G_1 经变换 $z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}z_1$ 映射为 z_2 平面上的第一象限 G_2.

最后，G_2 经变换 $w=z_2^2$ 映射为 w 平面上的上半平面 G'.

经验证，将上述诸变换复合所得

$$w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

即为所求.

【例 6.7】 求将 $G:\mathrm{Im}\,z>0$ 映射为 $G':|w-w_0|<R$ 的分式线性变换 $w=f(z)$，且使 $f(\mathrm{i})=w_0$，$f'(\mathrm{i})>0$ (见图 6. 11).

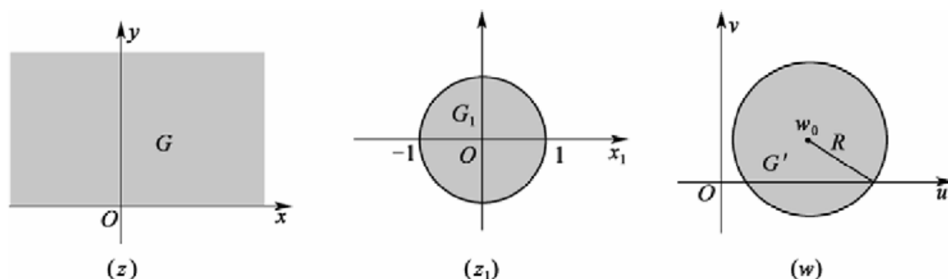


图 6.11

解 由于将 G 映射为单位圆的变换已知(例 6.2)，将 G'映射为单位圆的变换也容易求出(用平移、相似变换即可)，故将 G 映射为 G'的变换也容易求出，其步骤如下：

首先，G 经 $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$(在例 6.2 中，取 $\alpha = \mathrm{i}$)映射为 z_1 平面上的 $G_1 : |z_1| < 1$.

其次，G' 经 $z_1 = \dfrac{w-w_0}{R}$ 映射为 z_1 平面上的 $G_1 : |z_1| < 1$.

于是，有 $\dfrac{w-w_0}{R} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$

即

$$w = f(z) = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} + w_0 \tag{6.11}$$

由此，有

$$f'(z) = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{2\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^2}$$

于是，有

$$f'(\mathrm{i}) = -\frac{R}{2}\mathrm{i}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \frac{R}{2}(\sin\theta - \mathrm{i}\cos\theta)$$

为使 $f'(\mathrm{i}) > 0$，需 $-\dfrac{R}{2}\cos\theta = 0$，即 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$，将其代入式(6.11)，经验证，所得变换

$$w = R\mathrm{i}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} + w_0$$

即为所求.

6.5 习　　题

1．求下列解析函数在指定点处的旋转角和伸缩率.

(1) $w = 3z^2$ 在 $z = \mathrm{i}$ 处；

(2) $w = (1+\sqrt{3}\mathrm{i})z + 2 - \mathrm{i}$ 在 $z = 1$ 处；

(3) $w=\mathrm{e}^z$ 在 $z=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$ 处.

2．在映射 $w=\mathrm{i}z$ 下，下列图形映射成什么图形？

(1)以 $z_1=\mathrm{i}, z_2=-1, z_3=1$ 为顶点的三角形；

(2)闭圆域：$|z-1|\leqslant 1$.

3．设映射由下列函数所构成，阐明在 z 平面上哪一部分被放大了，哪一部分被缩小.

(1) $w=z^2+2z$；

(2) $w=\mathrm{e}^{z+1}$.

4．$w=z^2$ 将经过点 $z=\mathrm{i}$ 且平行于实轴正向曲线的切线方向映射成 w 平面上哪一个方向？

5．下列映射在 z 平面上每一点都具有旋转角和伸缩率的不变性吗？

(1) $w=z^2$；

(2) $w=\dfrac{1}{3}z^2+z$.

6．证明：映射 $w=z+\dfrac{1}{z}$ 把圆周 $|z|=C(C>0)$ 映射成椭圆：

$$u=\left(C+\frac{1}{C}\right)\cos\theta, v=\left(C-\frac{1}{C}\right)\sin\theta$$

7．证明：在映射 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 下，互相正交的直线族 $\mathrm{Re}\,z=C_1$ 与 $\mathrm{Im}\,z=C_2$ 依次映射成互相正交的直线族 $v=u\tan C_1$ 与圆族 $u^2+v^2=\mathrm{e}^{-2C_1}$.

8．问 $w=\dfrac{1}{z}$ 把 z 平面上的下列曲线映射成 w 平面上的何种曲线？

(1) $x^2+y^2=4$；

(2) $y=0$；

(3) $x^2+(y-1)^2=1$；

(4) $y=x$；

(5) $(x-1)^2+y^2=1$；

(6) $x=1$.

9．求把上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，并满足条件：

(1) $f(\mathrm{i})=0, \arg f'(\mathrm{i})=0$；

(2) $f(1)=1, \arg f(\mathrm{i})=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

10．求把单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，并满足条件：

(1) $f(\frac{1}{2})=0, \arg f'(\frac{1}{2})=0$；

(2) $f(a)=a, \arg f'(a)=\varphi$.

11．求下列区域在指定的映射下的象域.

(1) $\operatorname{Re} z>0, w=\mathrm{i}z+\mathrm{i}$；

(2) $\operatorname{Im} z>0, w=(1+\mathrm{i})z$；

(3) $0<\operatorname{Im} z<\frac{1}{2}, w=\frac{1}{z}$；

(4) $\operatorname{Im} z>0, \operatorname{Re} z>1, w=\frac{1}{z}$.

12．试求满足下列条件的分式线性映射.

(1) $w(1)=1, w(\mathrm{i})=0, w(-\mathrm{i})=-1$；

(2) $w(-1)=\infty, w(1)=0, w(\mathrm{i})=1$；

(3) $w(-1)=\infty, w(\infty)=\mathrm{i}, w(\mathrm{i})=1$

13．求将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射成上半平面 $\operatorname{Im} w>0$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，并满足条件：

(1) $w(0)=1, w(1)=2, w(2)=\infty$；

(2) $w(0)=1, w(\mathrm{i})=2\mathrm{i}$.

14．下列区域在指定映射下映射成什么？

(1) $D:\operatorname{Re} z>0, 0<\operatorname{Im} z<1, w=\frac{\mathrm{i}}{z}$；

(2) $D:|z|<1, \operatorname{Im} z<0, w=\frac{z+1}{1-z}$.

15．下列区域在指定映射下映射成什么？

(1) $D:-\infty<x<0, 0<y<2\pi, w=\mathrm{e}^{x}$；

(2) $D:|x|>1, 0<\arg z<\pi, w=\ln z$.

16．下列区域在指定映射下映射成什么？

(1) $D:\operatorname{Im} z>0, |z|<1, w=\frac{2z^2-1}{2+z^2}$；

(2) $D:0<\operatorname{Im} z>2\pi, w=\frac{\sqrt{\mathrm{e}^{z}}-(1+\mathrm{i})}{\sqrt{\mathrm{e}^{z}}-(1-\mathrm{i})}$.

17．把下列各区域映射成上半平面 $\operatorname{Im} w>0$，求出实现各个映射的函数 $w=f(z)$.

(1) $\operatorname{Im} z>1, |z|<2$；

(2)$|z|<2, 0<\arg z<\frac{\pi}{4}$；

(3)单位圆$|z|<1$的内部，且沿由 0 到1的半径有割痕；

(4)$|z|<1$，$|z-\mathrm{i}|>1$；

(5)单位圆$|z|<1$的外部，且沿虚轴 i 到∞的有割痕；

(6)$|z|<2$，$|z-1|>1$.

18．试求在儒可夫斯基映射$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$下，下列各区域在$w$平面上的象.

(1) $\operatorname{Im} z>0$；

(2)$|z|<1, \operatorname{Im} z>0$；

(3)过点± 1且在点$z=1$与实轴的正向间夹角为α的圆C的外部区域$(0<\alpha<\pi)$.

第 7 章　傅里叶变换

教学提示：傅里叶(Fourier)变换是一种对连续时间函数的积分变换，它通过特定形式的积分建立了函数之间的对应关系．它既能简化计算(如求解微分方程、化卷积为乘积等)，又具有明确的物理意义(从频谱的角度来描述函数的特征)，因而在许多领域被广泛地应用，如电力工程、通信和控制领域以及其他许多数学、物理和工程技术领域．

教学目标：通过本章的学习，了解傅里叶变换的定义；掌握傅里叶变换的性质与计算；掌握一些简单函数的傅里叶变换及逆变换；了解卷积的概念以及卷积定理．

7.1　傅里叶变换的概念和性质

积分变换起源于 19 世纪的运算危机，英国著名的无线电工程师海维赛德(O. Heaviside)在用它求解电工学、物理学等领域中的线性微分方程的过程中逐步形成一种所谓的符号法，后来符号法又演变成今天的积分变换法．所谓积分变换，就是把某函数类 A 中的函数 $f(x)$ 乘上一个确定的二元函数 $k(x,s)$，然后计算积分，即

$$F(s)=\int_a^b f(x)k(x,s)\mathrm{d}x$$

这样变成另一个函数类 B 中的函数 $F(s)$.这里二元函数 $k(x,s)$ 是一个确定的二元函数，通常称为该积分变换的**核**，$f(x)$ 称为**象原函数**，$F(s)$ 称为 $f(x)$ 的**象函数**．当选取不同的积分域和核函数时，就得到不同名称的积分变换．

设 $\mathbf{R}$ 是全体实数的集合，当 $\omega\in\mathbf{R}$，$a=-\infty,b=+\infty$ 时，由核函数

$$k(x,\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\omega}$$

所确定的积分变换

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\omega}\mathrm{d}x$$

就是傅里叶变换．

设 s 属于复数集 $\mathbf{C}$，当 $t\in[0,+\infty)$，$a=0,b=+\infty$ 时，则由核

$$k(s,t)=\mathrm{e}^{-st}$$

所确定的积分变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

就是拉普拉斯变换．

7.1.1　傅里叶积分

高等数学中，学习傅里叶级数时，以 T 为周期的函数 $f(x)$在区间 $\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利

克雷(Dirichlet)条件，即在区间$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上：

①连续或只有有限个第一类间断点；

②只有有限个极值点.那么在$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上就可以展成傅里叶级数.

设在以 T 为周期的函数 $f_T(x)$ 的连续点处，级数的三角形式为

$$f_T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x\right) \tag{7.1}$$

式中，

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(x)\mathrm{d}x\\ a_n&=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(x)\cos n\omega x\mathrm{d}x\\ b_n&=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(x)\sin n\omega x\mathrm{d}x\end{aligned}\right.\qquad n=1,2,3,\cdots$$

为今后应用上的方便，下面把傅里叶级数的三角式转换为复指数形式. 由欧拉公式

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2},\sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$$

此时，式(7.1)可写为

$$\begin{aligned} f_T(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}}{2}+b_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}}{2\mathrm{i}}\right)\\ &=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}+\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\right)\end{aligned}$$

如果令

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} c_n&=\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\\ &=\frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2}f_T(x)\cos n\omega x\mathrm{d}x-\mathrm{i}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(x)\sin n\omega x\mathrm{d}x\right]\qquad n=1,2,3,\cdots\\ &=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(x)\left(\cos n\omega x-\mathrm{i}\sin n\omega x\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$c_{-n}=\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x,\quad n=1,2,3,\cdots$$

而它们可以合写成一个式子

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x, \quad n = \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$$

若令 $w_n = n\omega\left(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots\right)$

则式(7.1)可写成

$$\begin{aligned} f_T(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}w_n x} + c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w_n x}\right) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}w_n x} \end{aligned}$$

这就是傅里叶级数的复指数形式，或者写为

$$f_T(x) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w_n \tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}w_n x} \tag{7.2}$$

[案例]　在工程技术中，周期函数可以展开成傅里叶级数，那么非周期函数呢?能否用一个周期函数逼近一个非周期函数呢?

在高等数学中，给出了以 T 为周期的函数展开成傅里叶级数的方法，由前面的推导知其复数形式为式(7.2). 一般而言，任何一个非周期函数 $f(x)$ 都可以看成是由某个周期函数 $f_T(x)$ 当周期 $T \to +\infty$ 时转化而来的.

为说明这一点，作周期为 T 的函数 $f_T(x)$，使其在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 之内等于 $f(x)$，而在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 之外按周期 T 的函数 $f_T(x)$ 延拓出去.

$$f_T(x) = \begin{cases} f(x) &, \quad x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ f_T(x+T) &, \quad x \overline{\in} \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$

T 越大，$f_T(x)$ 与 $f(x)$ 相等的范围也越大，这表明当 $T \to +\infty$ 时，周期函数 $f_T(x)$ 便可以转化为 $f(x)$，即有

$$\lim_{T \to +\infty} f_T(x) = f(x)$$

这样，在式(7.2)中令 $T \to +\infty$ 时，结果就可以看成是 $f(x)$ 的展开式，即

$$f(x) = \lim_{T \to +\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n \tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n x}$$

当 n 取一切整数时，w_n 所对应的点便均匀地分布在整个数轴上.若取两个相邻点的距离以 $\Delta\omega$ 表示，即

$$\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{2\pi}{T}, \quad 或 T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

则当 $T \to +\infty$ 时，有 $\Delta\omega \to 0$，所以上式又可以写为

$$f(x)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-T/2}^{T/2}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]e^{i\omega_n x}\Delta\omega \tag{7.3}$$

当 x 固定时，$\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-T/2}^{T/2}f_T(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega x}$ 是参数 ω 的函数，记为 $\Phi_T(\omega)$，即

$$\Phi_T(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-T/2}^{T/2}f_T(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega x}$$

利用 $\Phi_T(\omega)$ 可将式(7.3)写成

$$f(x)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Phi_T(\omega_n)\Delta\omega$$

很明显，当 $\Delta\omega\to 0$ 时，即 $T\to+\infty$ 时，有 $\Phi_T(\omega)\to\Phi(\omega)$

这里，$\Phi(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega x}$

从而 $f(x)$ 可以看作是 $\Phi(\omega)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分 $f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)d\omega$，即

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega x}d\omega \tag{7.4}$$

这个公式称为函数 $f(x)$ 的**傅里叶积分公式**(简称傅里叶积分公式). 应该指出，上式只是由式(7.3)式的右端从形式上推出来的，是不严格的. 至于一个非周期函数 $f(x)$ 在什么条件下，可以用傅里叶积分公式表示，有下面的定理.

傅里叶积分定理　若 $f(t)$在$(-\infty，+\infty)$上满足：

(1)在任一有限区间上满足狄利克雷条件；

(2)在无限区间$(-\infty，+\infty)$上，绝对可积(即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ 收敛)；则有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega x}d\omega=\begin{cases}f(x) & (\text{在连续点上})\\ \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0) & (\text{在间断点上})\end{cases} \tag{7.5}$$

这个式子称为傅里叶积分的复指数形式，利用欧拉公式，可将它转化为三角形式. 因为

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega x}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{i\omega(x-\tau)}d\tau\right]d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(x-\tau)d\tau\right]d\omega+i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(x-\tau)d\tau\right]d\omega\end{aligned}$$

考虑到积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(x-\tau)d\tau$ 是 ω 的奇函数，就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(x-\tau)d\tau\right]d\omega=0$$

从而

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(x-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega$$

又考虑到积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(x-\tau)\mathrm{d}\tau$ 是 ω 的偶函数，上式又可以写为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(x-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega$$

这便是 $f(x)$ 的**傅里叶积分公式的三角形式**了，稍加改变，还可以得到其他形式.

7.1.2　傅里叶变换的概念

定义 7.1　如果函数 $f(t)$满足傅里叶积分定理，由式(7.4)，设

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{7.6}$$

则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7.7}$$

从上面两式可以看出，$f(t)$和 $F(\omega)$ 通过确定的积分运算可以互相转换．(7.6)式称为 $f(t)$ 的**傅里叶变换式**(简称傅里叶变换)，记为

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$$

$F(\omega)$ 称为 $f(t)$的**象函数**，其积分运算称为取 $f(t)$的傅里叶变换．式(7.7)称作 $F(\omega)$ 的**傅里叶逆变换式**，记为

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

$f(t)$称作 $F(\omega)$的**象原函数**，其积分运算称为取 $f(t)$的傅里叶逆变换．通常称象函数 $F(\omega)$ 与象原函数 $f(t)$构成一个傅里叶变换对.

【例 7.1】　求函数 $f(x)=\begin{cases}1,|x|<c\\0,|x|>c\end{cases}$ 的傅里叶变换.

解　有傅里叶变换的定义

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\\&=\int_{-c}^{c}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\int_{-c}^{c}\cos\omega x\mathrm{d}x-\mathrm{i}\int_{-c}^{c}\sin\omega x\mathrm{d}x\\&=2\int_{0}^{c}\cos\omega x\mathrm{d}x\\&=\begin{cases}\dfrac{2\sin\omega x}{\omega},\omega\neq 0;\\2c,\omega=0\end{cases}\end{aligned}$$

【例 7.2】　求指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ 的傅里叶变换及傅里叶积分表达式，$\beta>0$．这个**指数衰减函数**，是工程技术中常遇到的一个函数.

解 由的傅里叶变换

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\mathscr{F}[f(t)]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\\&=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega}=\frac{\beta-\mathrm{j}\omega}{\beta^2+\omega^2}\end{aligned}$$

其傅里叶积分表达式

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-\mathrm{j}\omega}{\beta^2+\omega^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\beta-\mathrm{j}\omega)(\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t)}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

注意利用奇、偶函数的积分性质，可得

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega$$

由此顺便得到一个含参变量广义积分的结果

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{\pi}{2}, x=0\\ \pi\mathrm{e}^{-\beta x}, x>0\end{cases}$$

求一个函数的积分表达式时，能够得到某些含参变量广义积分的值，这是积分变换的一个重要作用，也是含参变量广义积分的一种巧妙的解法.

7.1.3 δ 函数及其傅里叶变换

为了突出主要因素，在物理学中，常有集中于一点或一瞬时的量，如脉冲力、脉冲电压、点电荷、质点的质量等. 只有引入一个特殊函数来表示它们的分布密度，才有可能把这种集中的量与连续分布的量来统一处理.

[案例] 取 t 轴上无穷长的细杆，杆上除在 $t=0$ 上有质量 $m=1$ 之外，处处没有质量分布. 设其在点 t 的线密度为 $\rho(t)$，分析可知：

(1)$t\neq 0$ 时，$\rho(t)=0$；

(2)$t=0$ 时，$\rho(t)=+\infty$(因 $t=0$ 有集中质量)；

(3)其积分值 $\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(t)\mathrm{d}t=1$ 是质量.

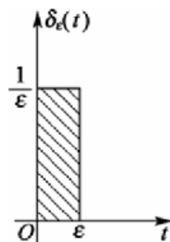


图 7.1

显然，不能用普通函数定义上面的点密度. 如不考虑物理意义，经过数学抽象后，便可引入 δ 函数的概念.

单位脉冲函数又称为 δ 函数，它通常表示在 ε 时间内激发一个

矩形脉冲 $\delta_\varepsilon(t)$，其面积为 1(见图 7.1)，其定义为

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon\\ 0, & \varepsilon<t\end{cases}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\delta_\varepsilon(t)$ 的极限就称为**单位脉冲函数**，即

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t).$$



图 7.2

$\delta(t)$ 具有如下特点．从函数极值角度看

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

从面积角度看

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{d}t=1$$

有时将 δ 函数用一个长度等于 1 的有向线段(见图 7.2)表示，线段长度表示 δ 函数的积分值，称为 δ 函数的强度．

δ 函数有一重要性质(筛选性质)，如果 δ 函数与某一连续函数(工程上为一连续信号)相乘，则其乘积仅在 $t=0$ 处得到 $f(0)\delta(t)$，其余各点($t\neq 0$)之乘积均为零，于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(0)\mathrm{d}t=f(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=f(0) \tag{7.8}$$

同理，对于有延时 t_0 的 δ 函数 $\delta(t-t_0)$，只有在 $t=t_0$ 时才不等于零．因此有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0) \tag{7.9}$$

式(7.8)、式(7.9)表示 δ 函数的筛选(又称采样)性质，它表明 δ 函数与任何连续函数的乘积在$(-\infty,+\infty)$上的积分有明确的意义，这个性质对连续信号的离散采样十分重要，因此在工程技术中有广泛的应用．

由式(7.6)可得 δ 函数的傅里叶变换

$$F(\omega)=\mathscr{F}\left[\delta(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\big|_{t=0}=1$$

更一般地，对 $\delta(t-t_0)$

$$\mathscr{F}\left[\delta(t-t_0)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

所以单位脉冲函数 $\delta(t)$ 与常数 1，$\delta(t-t_0)$ 与 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$ 分别构成傅里叶变换对．

同样，若 $F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$，则由傅里叶逆变换，可得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\,\delta(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=1$$

可见，1 和 $2\pi\delta(\omega)$ 构成傅里叶变换对；同理，$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$ 和 $2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$ 也构成傅里叶变换对．由此可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)\text{，}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega-\omega_0)\text{，}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sgn}x\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega} & \omega\neq 0\\ 0 & \omega=0\end{cases}$$

在工程技术上有许多重要的函数不满足傅里叶积分定理条件，即不满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty$$

例如常数、符号函数、单位阶跃函数、正弦函数和余弦函数等，但它们的广义傅里叶变换也是存在的(所谓广义是相对古典意义而言的，这涉及广义函数论等较复杂的理论，在此不作深入的讨论)．利用单位脉冲函数及其傅里叶变换可以求出它们的傅里叶变换．下面通过傅里叶逆变换来推证单位阶跃函数的傅里叶变换及其积分表达式．

【例 7.3】　求单位阶跃函数

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

的傅里叶变换及其积分表达式．

解　注意到

$$u(t)=\frac{1}{2}[1+\operatorname{sgn}t]$$

于是

$$\begin{aligned}F(\omega)=\mathscr{F}[u(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[1+\operatorname{sgn}t]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sgn}t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{2}\{\mathscr{F}[1]+\mathscr{F}[\operatorname{sgn}t]\}\\&=\frac{1}{2}\left[2\pi\delta(\omega)+\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\right]\\&=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}u(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

这就是单位阶跃函数的积分表达式．在上式中令 t=1，可得狄利克雷积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

【例 7.4】　求余弦函数 $f(t)=\cos\omega_0 t$ 的傅里叶积分．

解　由欧拉公式

$$\cos\omega_0 t=\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

及傅里叶变换公式，有

$$F(\omega)=\mathscr{F}\left[\cos\omega_0 t\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega_0 t e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_0)+2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$=\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

同理可得

$$F(\omega)=\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]=j\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

7.1.4 傅里叶变换的性质

1. 线性性质

$\mathscr{F}\left[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right]=\alpha\mathscr{F}[f_1(t)]+\beta\mathscr{F}[f_2(t)]$，$\alpha$、$\beta$ 为常数；

2. 位移性质(亦称时延定理)若

$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，$t_0$ 为一常数，则 $\mathscr{F}[f(t\pm t_0)]=e^{\pm j\omega t_0}F(\omega)$；

同样，对傅里叶逆变换也有类似的位移性质，即

$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega\pm\omega_0)]=f(t)e^{\mp j\omega_0 t}$

3. 微分性质

$$\mathscr{F}[f'(t)]=j\omega\mathscr{F}[f(t)]$$

4. 积分性质

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)dt\right]=\frac{1}{j\omega}\mathscr{F}[f(t)]$$

【例 7.5】 求矩形单脉冲函数

$$f(t)=\begin{cases}E, & 0<t<\tau\\ 0 & 其他\end{cases}$$

的傅里叶变换.

解 首先由傅里叶变换定义，得

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=E\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}dt=-\frac{E}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_0^{\tau}$$

$$=\frac{2E}{\omega}e^{-j\omega\tau/2}\sin\frac{\omega\tau}{2}$$

又注意到，记

$$f_1(t)=\begin{cases}E, & |t|<\tau/2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]=\dfrac{2E}{\omega}\sin\dfrac{\omega\tau}{2}$，且 $f(t)=f_1(t-\dfrac{\tau}{2})$，于是有位移性质知

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[f_1(t-\frac{\tau}{2})]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathscr{F}[f_1(t)]=\frac{2E}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau/2}\sin\frac{\omega\tau}{2}$$

这与上面计算的结果是一样的.

7.2　傅里叶变换的应用

傅里叶变换在数学领域或在工程技术方面都有着广泛的应用.在这里仅简单介绍一下系统分析的频谱理论.

7.2.1　周期函数与离散频谱

众所周知，一个谐波函数

$$f(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

是由幅值 A，相位 φ 和频率 ω_0 三个参数唯一地确定了.

对于周期为 T 的周期函数 $f(t)$，它可展成指数形式的傅里叶级数：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

对上式两边取傅里叶变换，并考虑 $F(n)$ 不是时间 t 的函数，由此可得

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n)\delta(\omega-n\omega_0)$$

$F(\omega)$ 是周期函数的傅里叶变换谱. 上式表明，周期函数的频谱由无穷多个脉冲组成，这些脉冲位于频率 $n\omega_0$ 处，每个脉冲的脉冲强度为 $2\pi F(n)$.

需指出，虽然从频谱的图形上，这里的 $F(\omega)$ 与 $F(n)$ 是极其相似的，但两者含义不同. 当对周期函数进行傅里叶变换时，所得到的是频谱密度；而将该函数展成傅里叶级数时，所得到的傅里叶系数，是复指数分量的幅值.

可见，引入了脉冲函数之后，对周期函数和非周期函数可以用相同的观点和方法进行分析运算，这将给信号分析带来了很大的方便.

【例 7.6】　周期锯齿波如图 7.3(a)所示，求它的频谱.

解　在区间 $\left(-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right)$ 内的表达式为

$$f(t)=\frac{E}{T}t\qquad\left(-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}\right)$$

且关于原点对称，所以是奇函数.

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0$$

由级数的展开得

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \frac{Et}{T}\sin n\omega_0 t \mathrm{d}t = (-1)^{n+1}\frac{E}{n\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$A_n = b_n$$

$$\varphi_n = \begin{cases} -\pi/2, & (n = 1, 3, 5, \cdots) \\ \pi/2, & (n = 2, 4, 6, \cdots) \end{cases}$$

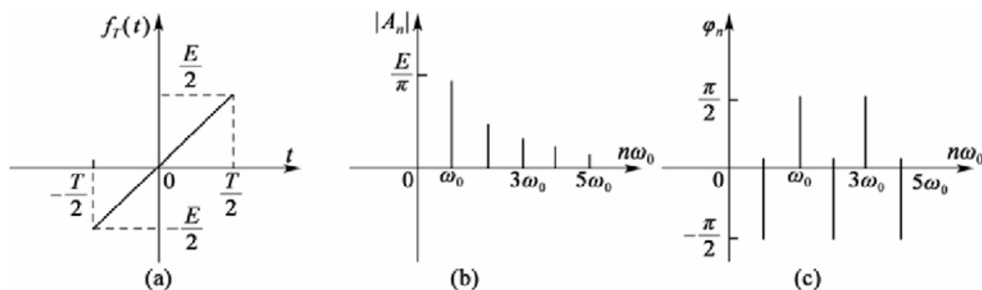


图 7.3

$$f(t) = \frac{E}{\pi}\left(\sin\omega_0 t - \frac{1}{2}\sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t - \cdots\right)$$

其频谱图如图 7.3(b)、图 7.3(c)所示. 由此可见, 周期函数的频谱或谱线只出现在 0, $\omega 0$, $2\omega 0$, …等离散点上, 分布于整个频域中, 形成离散谱. 离散谱是周期函数的重要特征.

7.2.2　非周期函数与连续频谱

对于非周期函数 $f(t)$, 若满足傅里叶积分定理中的条件, 则在 $f(t)$的连续点处, 有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

其傅里叶变换式

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

在频谱分析中, 傅里叶变换式 $F(\omega)$ 又称为 $f(t)$的**频谱函数**, 频谱函数的模$|F(\omega)|$称为 $f(t)$ 的**振幅频谱**(亦简称频谱). 在傅里叶积分中当 $n\to+\infty$时, 频率间隔 $\Delta\omega$ 成为 $\mathrm{d}\omega$, ω 为连续变量, 故称$|F(\omega)|$为**连续频谱**. 对一个时间函数 $f(t)$作傅里叶变换, 就是求 $f(t)$的频谱.

【例 7.7】　作指数衰减函数

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t \geqslant 0 \end{cases} \quad (\beta > 0)$$

的频谱图.

解　由例 7.1 的结果, 得

$$F(\omega) = \frac{\beta - \mathrm{j}\omega}{\beta^2 + \omega^2}$$

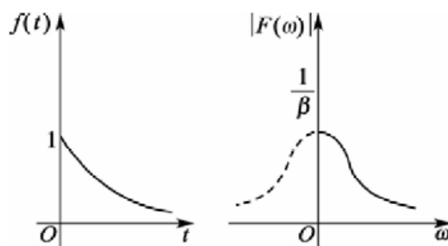


图 7.4

所以有

$$|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}}$$

作频谱图如图 7.4 所示.

在工程技术中，将经常碰到的一些非周期函数及其傅里叶变换(或频谱)可通过查表求得.

7.3　习　　题

1．试证：若 $f(t)$ 满足傅里叶积分定理中的条件，则有

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}\omega$$

2. 试证：若 $f(t)$ 满足傅里叶积分定理中的条件，且 $f(t)$ 为奇函数时，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{b}(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega \qquad \text{其中} \quad b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\text{；}$$

当 $f(t)$ 为偶函数时，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

其中

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau .$$

3．求下列函数的傅里叶变换.

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta|t|}$　$(\beta>0)$；(2) $f(t)=\mathrm{e}^{-|t|}\cos t$；

(3) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\leqslant\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$；

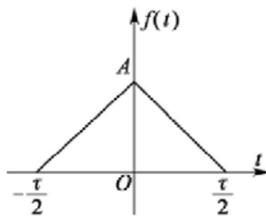


图 7.5

(4) $f(t)=\begin{cases}A\cos\omega_0 t, & |t|\leqslant T,\\ 0, & |t|>T;\end{cases}$　　(5) $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi t}{T}, & |t|<T,\\ 0, & |t|>T;\end{cases}$

(6) $f(t)=\mathrm{e}^{-|t|}\cos t$;　　(7) $f(t)=\frac{\sin at}{\pi t}$.

4．已知某函数的傅里叶变换为 $F(\omega)=\frac{\sin\omega}{\omega}$，求该函数 $f(t)$.

5．求函数 $f(t)$ =sin$t$cos$t$ 的傅里叶变换.

6．试求函数 $f(t)=\sin(5t+\frac{\pi}{3})$ 的傅里叶变换.

7．求图 7.5 三角形脉冲的频谱函数.

8．求下列函数的傅里叶积分：

(1) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & t^2<1,\\ 0, & t^2>1;\end{cases}$ (2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-t}\sin 2t, & t\geqslant 0;\end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases}-1, & -1\leqslant t<0,\\ 1, & 0<t\leqslant 1,\\ 0, & t>1.\end{cases}$

9. 试求如图 7.6 所示周期函数的幅值谱和相位谱.

10. 利用傅里叶变换性质求下列函数的傅里叶变换：

(1) $tf(at-b)$； (2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(at-b)$；

(3) $(at-b)f(at-b)$； (4) $\int_{-\infty}^{t}f(2t-2)\mathrm{d}t$；

(5) $f(t)\cos\omega_0(t-b)$.

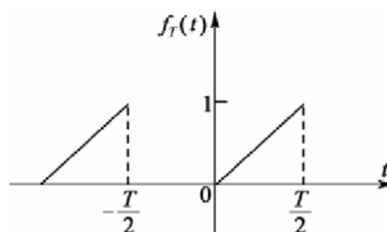


图 7.6

第 8 章　拉普拉斯变换

教学提示：傅里叶变换在许多领域中发挥着重要的作用，但是在实际应用中受到一些限制．本章主要讨论的拉普拉斯变换放宽了对函数的限制并使之更适合工程实际，并且保留傅里叶变换中许多好的性质，而且某些性质(如微分性质、卷积等)比傅里叶变换更实用、更方便．

教学目标：了解拉普拉斯变换及逆变换的概念；理解拉普拉斯变换性质，掌握拉普拉斯变换及逆变换的方法；掌握用拉普拉斯变换的方法解微分方程．

8.1　拉普拉斯变换的概念与性质

由第 7 章可知，需进行傅里叶变换的函数应满足傅里叶积分存在定理的两个条件：(1)在任一有限区间上满足狄利克雷条件；(2)在无限区间$(-\infty, +\infty)$上绝对可积．而傅里叶变换存在两个缺点．

缺点 1：条件(2)过强．在实际应用中，许多函数不能满足条件(2)．

[案例]　单位阶跃函数、正弦函数、余弦函数等，虽满足狄利克雷条件，但非绝对可积．因此，对这些函数就不能进行古典意义下的傅里叶变换．尽管在第 7 章里，通过引入 δ 函数，在广义下对非绝对可积函数进行了傅里叶变换，但 δ 函数使用很不方便．

缺点 2：进行傅里叶变换的函数须在$(-\infty, \infty)$上有定义．

[案例]　在物理、无线电技术、机械工程等实际应用中，许多以时间 t 为自变量的函数在 $t<0$ 时是无意义的或者是无需考虑的．因此，对这些函数也不能进行傅里叶变换．

由此可见，傅里叶变换的应用范围受到了极大的限制，必须引入一种新的变换．

8.1.1　拉普拉斯变换的概念

由于单位阶跃函数 $u(t)$在 $t<0$ 时恒为零，因此 $f(t)u(t)$可使积分区间从$(-\infty, +\infty)$变成$\left[0, +\infty\right)$，从而克服了缺点 2；另外，函数 $\mathrm{e}^{-\beta t}\ (\beta>0)$ 具有衰减性质，对于许多非绝对可积的函数 $f(t)$．总可选择适当大的 β，使 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 满足绝对可积的条件，从而克服了缺点 1．对 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 进行傅里叶变换，可得

$$F[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t$$

令

$$s = \beta + \mathrm{j}\omega$$

则

$$F[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}] = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

上式右边积分所得为复变量 s 的函数，记为 $F(s)$；称为 $f(t)$的拉普拉斯变换．

定义 8.1　设函数 $f(t)$当 $t\geqslant 0$ 时有定义，且广义积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

在 s 的某一区域内收敛，则由此积分确定的参数为 s 的函数

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{8.1}$$

叫做函数 $f(t)$的**拉普拉斯变换**，记作 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，函数 $F(s)$也可称为 $f(t)$的**象函数**．

在拉普拉斯变换中，只要求 $f(t)$在 $[0,+\infty)$ 内有定义即可．为了研究方便，以后总假定在 $(-\infty,0)$ 内，$f(t)\equiv 0$．另外，拉普拉斯变换中的参数 s 是在复数域中取值的，但只讨论 s 是实数的情况，所得结论也适用于 s 是复数的情况．

【例 8.1】　求指数函数 $f(t)=\mathrm{e}^{at}$ ($a\geqslant 0, a$ 是常数)的拉普拉斯变换．

解　由式(8.1)有

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-a)t}\mathrm{d}t$$

此积分在 $s>a$ 时收敛，有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-a)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{s-a}$$

所以

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}]=\frac{1}{s-a}(s>a)$$

【例 8.2】　求狄利克雷函数 $\delta_\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}, & 0\leqslant t<\tau\\ 0, & 其他\end{cases}$ 的拉普拉斯变换．

解　先对 $\delta_\tau(t)$ 作拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}\left[\delta_\tau(t)\right]=\int_0^{+\infty}\delta_\tau(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\tau}\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{\tau s}(1-\mathrm{e}^{-\tau s})$$

$\delta(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\left[\delta(t)\right]=\lim_{\tau\to 0}\mathscr{L}\left[\delta_\tau(t)\right]=\lim_{\tau\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-\tau s}}{\tau s}$$

用洛必达法则计算此极限，得

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-\tau s}}{\tau s}=\lim_{\tau\to 0}\frac{s\mathrm{e}^{-\tau s}}{s}=1$$

所以

$$\mathscr{L}\left[\delta(t)\right]=1$$

8.1.2　拉普拉斯变换的性质

性质 1(线性性质)若 a、b 是常数，且

$$\mathscr{L}\left[f_1(t)\right]=F_1(s),\qquad \mathscr{L}\left[f_2(t)\right]=F_2(s)$$

则

$$\mathscr{L}[af_1(t)+bf_2(t)]=a\mathscr{L}[f_1(t)]+b\mathscr{L}[f_2(t)]=aF_1(s)+bF_2(s)$$

性质 1 表明，函数的线性组合的拉普拉斯变换等于各函数的拉普拉斯变换的线性组合.

性质 1 可以推广到有限个函数的线性组合的情形.

【例 8.3】 求函数 $f(t)=\frac{1}{a}(1-e^{-at})$ 的拉普拉斯变换.

解 由性质 1，有

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{a}(1-e^{-at})\right]=\frac{1}{a}\mathscr{L}[1-e^{-at}]=\frac{1}{a}\{\mathscr{L}[1]-\mathscr{L}[e^{-at}]\}$$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right)=\frac{1}{s(s+a)}$$

性质 2(平移性质) **若** $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，**则** $\mathscr{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a)$.

性质 2 表明，象原函数乘以 e^{at}，等于其象函数作位移 a，因此性质 2 称为平移性质.

【例 8.4】 求 $\mathscr{L}[te^{at}]$ 及 $\mathscr{L}[e^{-at}\sin\omega t]$.

解 由平移性质及

$$\mathscr{L}[t]=\frac{1}{s^2},\quad \mathscr{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

得

$$\mathscr{L}\left[te^{at}\right]=\frac{1}{(s-a)^2}$$

$$\mathscr{L}\left[e^{-at}\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

性质 3(延滞性质) **若** $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ **则** $\mathscr{L}[f(t-a)]=e^{-as}F(s)\quad(a>0)$.

函数 $f(t-a)$ 与 $f(t)$ 相比，滞后了 a 个单位，若 t 表示时间，性质 3 表明，时间延迟了 a 个了单位，相当于象函数乘以指数因子 e^{-as}，如图 8.1 所示.

【例 8.5】 求函数

$$u(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t\geqslant a\end{cases}$$ 的拉普拉斯变换.

解 由 $\mathscr{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$ 及性质 3 可得

$$\mathscr{L}[u(t-a)]=\frac{1}{s}e^{-as}$$

【例 8.6】 求如图 8.2 所示的分段函数

$$h(t)=\begin{cases}1, & a\leqslant t<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的拉普拉斯变换.

解 由 $h(t)=u(t-a)-u(t-b)$ 得

$$\mathscr{L}[h(t)]=\mathscr{L}[u(t-a)-u(t-b)]=\mathscr{L}[u(t-a)]-\mathscr{L}[u(t-b)]$$
$$=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-as}-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-bs}=\frac{1}{s}(\mathrm{e}^{-as}-\mathrm{e}^{-bs})$$

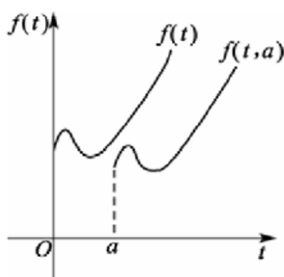


图 8.1

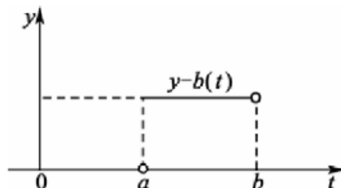


图 8.2

性质 4(微分性质)　若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，**则** $\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$.

性质 4 表明，一个函数求导后取拉普拉斯变换，等于这个函数的拉普拉斯变换乘以参数 s 再减去这个函数的初值.

性质 4 可以推广到函数的 n 阶导数的情形.

推论　若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-[s^{n-1}f(0)+s^{n-2}f'(0)+\cdots+f^{(n-1)}(0)]$$

特别地，若 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，则

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)\quad(n=1,2,\cdots)\tag{8.2}$$

根据性质 4 有可能将 $f(t)$的微分方程化作 $F(s)$的代数方程. 因此性质 4 在解微分方程中有重要作用.

【例 8.7】　用微分性质求 $\mathscr{L}[\sin\omega t]$.

解　令 $f(t)=\sin\omega t$，则

$$f(0)=0,\quad f'(t)=\omega\cos\omega t,\quad f'(0)=\omega,\quad f''(t)=-\omega^2\sin\omega t$$

由式(8.2)得

$$\mathscr{L}[-\omega^2\sin\omega t]=\mathscr{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

即
$$-\omega^2\mathscr{L}[\sin\omega t]=s^2\mathscr{L}[\sin\omega t]-\omega$$

移项并化简，即得

$$\mathscr{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

性质 5(积分性质)　若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，**则** $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{F(s)}{s}$.

性质 5 表明，一个函数积分后取拉普拉斯变换，等于这个函数的拉普拉斯变换除以参数 s.

性质 5 也可以推广到有限次积分的情形.

$$\mathscr{L}\left[\overbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t f(x)\mathrm{d}t}^{n次}\right]=\frac{F(s)}{s^n}$$
$$(n=1,2,\cdots)$$

除了上述五个性质外，拉普拉斯变换还有一些性质，有兴趣的同学可参阅相关书籍. 另外，并不总是用定义求函数的拉普拉斯变换，还可以查表求拉普拉斯变换.

【例 8.8】 查表求$\mathscr{L}\left[\dfrac{\sin t}{t}\right]$.

解 查表得

$$\mathscr{L}[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}=F(s)$$

从而得

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_s^{+\infty}\frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s=\arctan s\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\arctan s$$

8.2　拉普拉斯变换的逆变换

8.1 节讨论了由已知函数 $f(t)$ 求它的象函数 $F(s)$ 的问题. 本节讨论相反问题——已知象函数 $F(s)$，求它的象原函数 $f(t)$，即拉普拉斯变换的逆变换.

若 $F(s)$是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，则称 $f(t)$ 是 $F(s)$的**拉普拉斯逆变换**(或称为 $F(s)$的**象原函数**)，记作

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[f(s)]$$

8.2.1 部分分式法

在用拉普拉斯变换解决工程技术中的应用问题时，经常遇到的象函数是有理分式. 一般可将其分解为部分分式之和，然后再利用拉普拉斯变换表求出象原函数.

【例 8.9】 求 $F(s)=\dfrac{s+9}{s^2+5s+6}$ 的拉普拉斯逆变换.

解 先将 $F(s)$ 分解为部分分式之和

$$\frac{s+9}{s^2+5s+6}=\frac{s+9}{(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}$$

用待定系数法求得　$A=7,\quad B=-6$

所以

$$\frac{s+9}{s^2+5s+6}=\frac{7}{s+2}-\frac{6}{s+3}$$

则有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+9}{s^2+5s+6}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{7}{s+2}-\frac{6}{s+3}\right]$$

$$=7\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]-6\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]$$

$$=7\mathrm{e}^{-2t}-6\mathrm{e}^{-3t}$$

【例 8.10】　求 $F(s)=\dfrac{s+3}{s^3+4s^2+4s}$ 的拉普拉斯逆变换.

解　设 $\dfrac{s+3}{s^3+4s^2+4s}=\dfrac{s+3}{s(s+2)^2}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s+2}+\dfrac{C}{(s+2)^2}$

用待定系数法求得

$$A=\frac{3}{4}\quad B=-\frac{3}{4}\quad C=-\frac{1}{2}$$

所以

$$F(s)=\frac{s+3}{s^3+4s^2+4s}=\frac{3/4}{s}-\frac{3/4}{s+2}-\frac{1/2}{(s+2)^2}$$

则有

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{4}\frac{1}{s}-\frac{3}{4}\frac{1}{s+2}-\frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)^2}\right]$$

$$=\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right]$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t}$$

【例 8.11】　求 $F(s)=\dfrac{s^2}{(s+2)(s^2+2s+2)}$ 的拉普拉斯逆变换.

解　先将 $F(s)$分解为部分分式之和

设

$$F(s)=\frac{s^2}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

$$=\frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

用待定系数法，求得 $A=2\quad B=-1\quad C=-2$

所以

$$F(s)=\frac{2}{s+2}-\frac{s+2}{s^2+2s+2}=\frac{2}{s+2}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

于是

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathscr{L}^{-1}[F(s)] \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}\right] \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right] \\
&= 2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}\cos t-\mathrm{e}^{-t}\sin t \\
&= 2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}(\cos t+\sin t)
\end{aligned}
$$

8.2.2　拉普拉斯变换的逆变换的性质

在求象原函数时，常从拉普拉斯变换表中查找，同时要结合拉普拉斯变换的性质．因此把常用的拉普拉斯变换的性质用逆变换的形式列出如下．

设　$\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s)$，　$\mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s)$，　$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$．

1. 线性性质

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}[aF_1(s)+bF_2(s)] &= a\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]+b\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)] \\
&= af_1(t)+af_2(t) \quad (a,b\text{ 为常数}).
\end{aligned}
$$

2. 平移性质

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s-a)]=\mathrm{e}^{at}\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathrm{e}^{at}f(t)$$

3. 延滞性质

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\mathrm{e}^{as}F(s)\right]=f(t-a)u(t-a)$$

【例 8.12】　求下列函数的拉普拉斯逆变换：

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s+3}$；　　(2) $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)^2}$；

解　(1)查表可得，取 $a=-3$ 得

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]=\mathrm{e}^{-3t}$$

(2)查表可得，取 $a=2$ 得

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]=t\mathrm{e}^{2t}$$

【例 8.13】　求 $F(s)=\dfrac{2s+3}{s^2-2s+5}$ 的拉普拉斯逆变换．

解　$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s+3}{s^2-2s+5}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s+3}{(s-1)^2+4}\right]$

$$=2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right]+\frac{5}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2+4}\right]$$

$$=2\mathrm{e}^t\cos 2t+\frac{5}{2}\mathrm{e}^t\sin 2t$$

$$=\mathrm{e}^t\left(2\cos 2t+\frac{5}{2}\sin 2t\right)$$

8.3　拉普拉斯变换的应用

拉普拉斯变换在线性系统的分析和研究中起着重要作用．线性系统在物理、力学以及工程等许多场合可以用线性常微分方程来描述．这类系统在电路原理和自动控制理论中，都占着重要地位．下面介绍利用拉普拉斯变换求解线性常微分方程和电路问题．

8.3.1　微分方程的拉普拉斯变换解法

拉普拉斯变换解法主要借助于拉普拉斯变换把常系数线性微分方程(组)转换成复变数的代数方程(组)．根据代数方程(组)求出象函数，然后再取逆变换，即可求出原微分方程(组)的解．此方法简洁、方便，为工程技术人员所普遍采用．下面通过例题来说明该方法的应用．

【例 8.14】　求方程 $y''+2y'+y=\mathrm{e}^{-t}$ 满足初始条件 $y|_{t=0}=y'|_{t=0}=0$ 的解．

解　设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，对方程两边同取拉普拉斯变换．并考虑到初始条件，得

$$s^2Y(s)+2sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

因此有

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)^3}$$

查表可得

$$y(t)=\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t}$$

这就是所求的解．

【例 8.15】　求方程 $y''+y=t$ 满足初始条件 $y|_{t=0}=0, y'|_{t=0}=-2$ 的解．

解　设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，对方程两边同取拉普拉斯变换．并考虑到初始条件，得到

$$\mathscr{L}[y'']+\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[t],$$

$$s^2y(s)-sy(0)-y'(0)+y(s)=\frac{1}{s^2}$$

整理得

$$s^2y(s)-s+2+y(s)=\frac{1}{s^2}$$

这是含未知量 Y(s)的代数方程，整理后解出 $Y(s)$得：

$$y(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}+\frac{s-2}{s^2+1}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{2}{s^2+1}$$

$$=\frac{1}{s^2}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+1}$$

取它的逆变换便可以得出所求函数 $y(t)$，故

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+1}\right]=t-\cos t-3\sin t$$

振动问题是日常及工程技术中经常遇到的，例如机床主轴的振动，电路中的电磁振荡，减振弹簧的振动等，一般可归结为微分方程的问题来讨论．下面以无阻尼强迫振动为例说明其应用．

【例 8.16】 图 8.3 所示为一个弹簧—质量系统，在外力 $f(t)$的作用下，物体在平衡位置开始运动，求其运动规律(设 $f(t)=\delta(t)$即一单位脉冲力)．

解 该系统的动力学微分方程为

$$my''+ky=f(t)$$

其初始条件为

$$y|_{t=0}=y'|_{t=0}=0$$

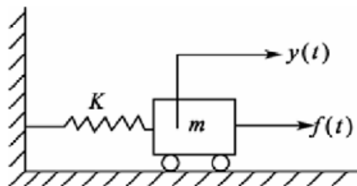


图 8.3

对方程两边取拉普拉斯变换，设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，并由初始条件，得到

$$ms^2Y(s)+kY(s)=F(s)$$

整理得 $$s^2Y(s)+\frac{k}{m}Y(s)=\frac{F(s)}{m}$$

对方程两边取拉普拉斯变换并代入初始条件得

$$Y(s)=\frac{1}{ms^2+k}$$

令 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$，则 $$y(s)=\frac{1}{m\omega_0}\cdot\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2}$$

故 $$y(t)=\frac{1}{m\omega_0}\sin\omega_0 t\qquad(t>0)$$

由此可知，在瞬时冲击力作用下，物体的运动为一正弦振动，振幅为 $\frac{A}{m\omega_0}$，角频率为 ω_0(亦称固有频率)．

8.3.2　电路问题的拉普拉斯变换解法

拉普拉斯变换可用在解电路问题中，下面考察 *RLC* 电路．

【例 8.17】　在 *RLC* 电路中，串接直流电源 E(见图 8.4)，求回路电流 $i(t)$．

图 8.4

解　根据基尔霍夫定律，有

$$E=U_C+U_L+U_R$$

其中，$U_R=R\cdot i(t)$，$i(t)=C\cdot\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$，

即 $U_C=\dfrac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t$，而 $U_L=L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$，将它们代入上式可得

$$\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t+R\cdot i(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=E\text{，初值为 } i(0)=i'(0)=0\text{．}$$

这是 *RLC* 串联电路中电流 $i(t)$所满足的关系式，它实际上是一个二阶线性常系数非齐次微分方程．对该方程两边取拉普拉斯变换，且设：$\mathscr{L}[i(t)]=I(s)$，则有

$$\frac{1}{Cs}I(s)+RI(s)+LsI(s)=\frac{E}{s}$$

解出 $I(s)$，得

$$I(s)=\frac{E}{s\left(Ls+R+\dfrac{1}{Cs}\right)}=\frac{E}{Ls^2+Rs+\dfrac{1}{C}}$$

求 $I(s)$的拉普拉斯逆变换，得 $i(t)=\mathscr{L}^{-1}[I(s)]$．

特别地，若 $C=1$，$R=1$，$L=2$，$E=10$，则

$$I(s)=\frac{10}{s\left(2s+1+\dfrac{1}{s}\right)}=\frac{10}{2s^2+s+1}=\frac{10}{2\left(s+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}}=5\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}{\left(s+\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$$

查表得　$i(t)=\dfrac{5\times4}{\sqrt{7}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{7}}{4}t=\dfrac{20}{\sqrt{7}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{7}}{4}t$．

通过这两章的学习可以发现傅里叶变换和拉普拉斯变换虽同是一种积分变换关系但它们有区别(见表 8-1)．

傅里叶变换与拉普拉斯变换的许多性质是对应的，因为它们积分核都是指数函数，仅具体形式稍有不同．表 8-2 列出本书中介绍过的两种变换的对应性质．

表 8-1　傅里叶变换与拉普拉斯变换的对照

	傅里叶变换	拉普拉斯变换
积分核	$e^{-j\omega t}$	e^{-st}
原函数定义区间	$(-\infty,\infty)$	$(0,\infty)$
原函数的条件	(1)满足狄利克雷条件； (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(x)\rvert dx$ 存在	(1)$f(t)$及其导数在 $t\geqslant 0$ 上除有第一类间断点外，处处连续； (2)$f(t)$小于某指数阶函数； (3)$t<0$ 时，$f(t)=0$
反演式	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ 与变换式形式对称	$\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\omega}^{\beta+j\omega}F(s)e^{st}ds$（其中 $\beta+j\omega=s$）与变换式形式不对称

表 8-2　傅里叶变换与拉普拉斯变换的性质比较

傅里叶变换	拉普拉斯变换
(1) $\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]$ $=\alpha\mathscr{F}[f_1(t)]+\beta\mathscr{F}[f_2(t)]$	(1) $\mathscr{L}[af_1(t)+bf_2(t)]=aF_1(s)+bF_2(s)$
(2) $\mathscr{F}[f(t\pm t_0)]=e^{\pm j\omega t_0}\mathscr{F}[f(t)]$	(2) $\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$； $\mathscr{L}[f(t-a)]=e^{-as}F(s)\qquad(a>0)$
(3) $\mathscr{F}[f'(t)]=j\omega\mathscr{F}[f(t)]$	(3) $\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$
(4) $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\right]=\frac{1}{j\omega}F(\omega)$	(4) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right]=\frac{F(s)}{s}$

8.4　习　　题

1．求下列函数的拉普拉斯变换．

(1) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leqslant t<2,\\ -1, & 2\leqslant t<4,\\ 0, & 4\leqslant t;\end{cases}$　　(2) $f(t)=\begin{cases}3, & t<\frac{\pi}{2},\\ \cos t, & t>\frac{\pi}{2};\end{cases}$

(3) $f(t)=\cos t\,\delta(t)-\sin t\,u(t)$；　　(4) $f(t)=1-te^{t}$；

(5) $f(t)=\frac{t}{2a}\sin at$；　　(6) $f(t)=5\sin 2t-\cos 2t$；

(7) $f(t)=e^{-4t}\cos 4t$；　　(8) $f(t)=u(3t-5)$；

(9) $f(t)=\sin^2 t$； (10) $f(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{3t}}{\sqrt{t}}$.

2．求下列函数的拉普拉斯变换，用查表方法验证结果.

(1) $f(t)=\sin\dfrac{t}{2}$； (2) $f(t)=t^2$； (3) $f(t)=\cos^2 t$；

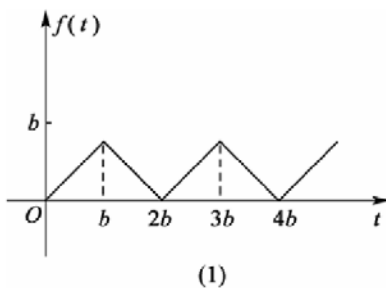
(4) $f(t)=\sin^2 t$； (5) $f(t)=\sin t\cos t$； (6) $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}$；

(7) $f(t)=\mathrm{e}^{2t}+5\delta(t)$； (8) $f(t)=\cos t\cdot\delta(t)-\sin t\cdot u(t)$.

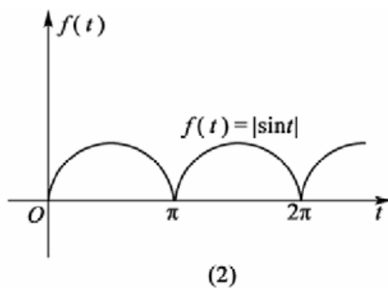
3．设$f(t)$是以 2π 为周期的函数，

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t\leqslant\pi,\\ 0, & \pi<t<2\pi,\end{cases}\qquad \text{求}\mathscr{L}[f(t)].$$

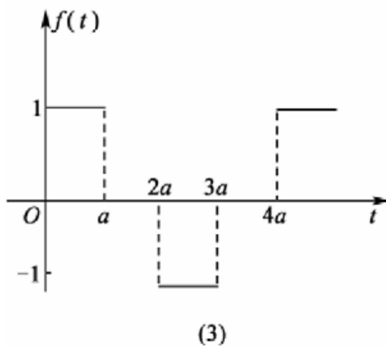
4．求图 8.5 所示周期函数的拉普拉斯变换.



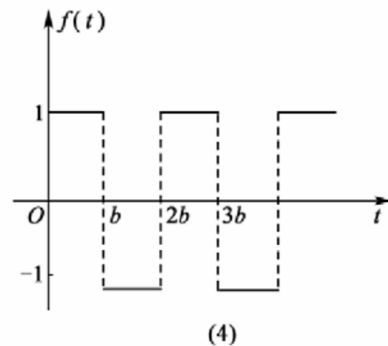
(1)



(2)



(3)



(4)

图 8.5

5．利用拉普拉斯变换的性质求下列函数的拉普拉斯变换.

(1) $f(t)=t^2+3t+2$； (2) $f(t)=1-t\mathrm{e}^t$； (3) $f(t)=t\cos at$；

(4) $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\sin 6t$； (5) $f(t)=5\sin 2t-3\cos 2t$； (6) $f(t)=t^n\mathrm{e}^{at}$；

(7) $f(t)=u(3t-5)$； (8) $f(t)=u(1-\mathrm{e}^{-t})$.

6．求下列函数的拉普拉斯变换的逆变换：

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$；　(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^4}$；　(3) $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^4}$；

(4) $F(s)=\dfrac{1}{s+3}$；　(5) $F(s)=\dfrac{2s+3}{s^2+9}$；　(6) $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s-3)}$；

(7) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+s-6}$；　(8) $F(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}$；　(9) $F(s)=\dfrac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}$；

(10) $F(s)=\dfrac{s^2+2a^2}{(s^2+a^2)^2}$；　(11) $F(s)=\dfrac{1}{s^4-a^4}$；　(12) $F(s)=\dfrac{s+c}{(s+a)(s+b)}$；

(13) $F(s)=\dfrac{s}{s+2}$；　(14) $F(s)=\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$；　(15) $F(s)=\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$；

(16) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+2s+2)^2}$；　(17) $F(s)=\dfrac{10-3s}{s^2+4}$.

7．求下列微分方程的解：

(1) $y''+4y'+3y=\mathrm{e}^{-t}, y(0)=y'(0)=1$；

(2) $y''+3y'+2y=u(t-1), y(0)=0, y'(0)=1$；

(3) $y''-y=4\sin t+5\cos 2t, y(0)=-1, y'(0)=-2$；

(4) $y''-2y'+2y=2\mathrm{e}^t\cos t, y(0)=y'(0)=0$；

(5) $y'''+y'=\mathrm{e}^{2t}, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$；

(6) $y^{(4)}+2y''+y=0, y(0)=y'(0)=y'''(0)=0, y''(0)=1$.

8．已知 $f(t)=t\int_0^t \mathrm{e}^{-3t}\sin 2t\mathrm{d}t$，求 $F(s)$.

9．求解积分方程　$f(t)=at+\int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$.

10．求方程 $y''+2y'+y=\mathrm{e}^{-t}$ 满足初始条件 $y|_{t=0}=0, y'|_{t=0}=1$ 的解.

11．设在原点处质量为 m 的一质点在 t=0 时，在 x 方向上受到冲击力 $k\delta(t)$ 的作用，其中 k 为常数，假定指点的初速为零，求其运动规律.

习 题 答 案

第 1 章

1．(1) $\mathrm{Re}\,z=\frac{3}{2},\mathrm{Im}\,z=-\frac{5}{2},\overline{Z}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i},|Z|=\frac{\sqrt{34}}{2},\arg z=-\arctan\frac{5}{3}$;

(2) $\mathrm{Re}\,z=-\frac{7}{2},\mathrm{Im}\,z=-13,\overline{Z}=-\frac{7}{2}+13\mathrm{i},|Z|=\frac{5\sqrt{29}}{2},\arg z=-\arctan\frac{26}{7}-\pi$;

(3) $\mathrm{Re}\,z=1,\mathrm{Im}\,z=5,\overline{Z}=1-5\mathrm{i},|Z|=\sqrt{26},\arg z=\arctan 5$;

(4) $\mathrm{Re}\,z=\frac{1}{2},\mathrm{Im}\,z=-\frac{\sqrt{3}}{2},\overline{Z}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},|Z|=1,\arg z=-\frac{\pi}{3}$.

2．(1) $3(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})=3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$;

(2) $3(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=3\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$;

(3) $2(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$;

(4) $\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\right]=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$.

3．(1) $-16\sqrt{3}-16\mathrm{i}$;

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i},\mathrm{i},-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i},-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i},-\mathrm{i},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$;

(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i},-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i},-\mathrm{i}$;

(4) $-32\mathrm{i}$.

4． $\frac{a(\sqrt{3}+\mathrm{i})}{2},a\mathrm{i},\frac{a(-\sqrt{3}+\mathrm{i})}{2},-\frac{a(\sqrt{3}+\mathrm{i})}{2},-a\mathrm{i},\frac{a(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{2}$.

5．模不变，辐角减小$\frac{\pi}{2}$.

6．提示：设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，利用 $\overline{f(a+b\mathrm{i})}=f(\overline{a+b\mathrm{i}})$.

7．模不变，辐角增加$\frac{\pi}{2}$.

8．(1)位于 z_1 与 z_2 的连线上，其中 $\lambda=\dfrac{|z-z_2|}{|z_1-z_2|}$；(2)位于 z_1 与 z_2 连线的中点.

9．提示：利用 $z\bar{z}=|z|^2$

10．(1) $x=-\dfrac{4}{11}$， $y=\dfrac{5}{11}$；

(2) $x_1=2, y_1=1$， $x_2=\dfrac{2}{3}, y_2=\dfrac{1}{2}$；

(3) $x=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, y=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$；其中：若 $b>0$，取同号；若 $b<0$，取异号.

11．(1) $y=x$；

(2) $\dfrac{x^2}{(a+b)^2}+\dfrac{y^2}{(a-b)^2}=1$；

(3) $xy=1$；

(4) $xy=1$，$(x>0, y>0)$.

12．(1)直线 $x=-3$；

(2)中心在 $-2\mathrm{i}$，半径为1的圆周及其外部区域；

(3)直线 $y=0$；

(4)直线 $y=3$；

(5) $y=x+1(x>0)$；

(6)以 -3 与 -1 为焦点，长轴为4的椭圆；

(7)不包含 x 轴的上半平面；

(8)直级 $x=\dfrac{5}{2}$ 及其左边的平面.

13．(1) $0<x<1$，无界、开的单连通区域；

(2)圆 $(x-1)^2+y^2=16$ 的外部区域(不包括圆周)，是无界的、开的复连通区域；

(3)以点 $z=\mathrm{i}$ 为顶点、两连分别与正实轴成角度为 $\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\dfrac{3\pi}{4}$ 的角形区域内部，它是无界、开的单连通区域；

(4)以 $3\mathrm{i}$ 为中心，1与2为内、外半径的圆环区域(不包括圆周)，是有界的、开的单连通区域；

(5)以点 $z=-\dfrac{17}{15}$ 为圆心，以 $\dfrac{8}{\sqrt{15}}$ 为半径的圆周及其内部，它是无界、闭的复连通区域；

(6)由射线 $\theta=1$ 及 $\theta=1+\pi$ 构成的角形区域(不包括射线在内)，它是无界的、开的复连通区域；

(7)双曲线 $4x^2-\dfrac{4}{15}y^2=1$ 的左边分支的内部区域(包括焦点 $z=-2$ 在内的部分)，它是无界、开的单连通区域；

(8)以$\frac{1}{2}$为中心，$\frac{1}{2}$与$\frac{3}{2}$为内、外半径的圆环区域(包括边界在内)，是有界的、闭的复连通区域；

(9)单位圆$|z|=1$及其内部区域(即$|z|\leqslant 1$)，它是有界、闭的单连通区域；

(10)圆$(x+6)^2+y^2=40$及其内部区域)，它是有界的、闭的单连通区域.

14．(1)$\frac{3}{2}$；(2)0；(3)0.

15．(1)$w=|z|$的定义域为整个Z平面，函数在Z平面上连续；

(2)$w=\frac{z^2+1}{(z+2)^2+1}$的定义域为除$z=-2\pm \mathrm{i}$外的$Z$平面，在$Z$平面上除点$z=-2\pm \mathrm{i}$外函数为连续.

16．设(1)$f(z)=\frac{\mathrm{Re}\, z}{z}$；　(2)$f(z)=\frac{z}{|z|}(z\neq 0)$；

(3)$f(z)=\frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}$；

试证当$z\to 0$时，$f(z)$的极限不存在.

17．试证函数$f(z)=\bar{z}$在Z平面上处处连续.

18．试证$\arg z(-\pi<\arg z\leqslant \pi)$在负实轴上(包括原点)不连续，除此而外在$Z$平面上处处连续.

19．设函数$f(z)$在点z_0处连续，且$f(z_0)\neq 0$，证明存在z_0的邻域使$f(z)\neq 0$.

20．如果函数$f(z)$在点z_0处连续，证明$\overline{f(z)},|f(z)|$在z_0处连续.

第 2 章

1．(1)在直线$x=-\frac{1}{2}$上可导，但在复平面上处处不解析；

(2)在直线$x\pm y=0$上可导，但在复平面上处处不解析；

(3)在$z=0$处可导，但在复平面上处处不解析；

(4)在$z=0$处可导，但在复平面上处处不解析.

2．(1)$f(z)$在复平面上处处解析，$f'(z)=3(z+4)^2$；

(2)$f(z)$在复平面上处处解析，$f'(z)=3z^2+2\mathrm{i}$；

(3)$f(z)$在除$z=\pm 1$外的复平面上处处解析，$f'(z)=\frac{-2z}{(z^2-1)^2}$，$z=\pm 1$为奇点；

(4)$f(z)$在复平面内除-1及$\frac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$外的多连通区域内处处解析，$f'(z)=\frac{2-4z^3-3z^2}{(z^3+1)^2}$，$z=-1$，$\frac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$为奇点.

11．令 $z=x+\mathrm{i}y$，用三角公式，将各函数表示为实部和虚部.

(1)正确；

(2)不正确；

(3)正确；

(4)正确.

13．用三角函数定义或用三角公式.

14．(1) $-\mathrm{sh}1$；

(2) $\frac{13}{5}$.

15． $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i}$，主值为 $-\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}$；

$\ln 5-\mathrm{i}\arctan\frac{4}{3}+(2k+1)\pi\mathrm{i}$，主值为 $\ln 5+(\pi-\arctan\frac{4}{3})\mathrm{i}$.

16． $\sin 1\,\mathrm{ch}1+\mathrm{i}\cos 1\,\mathrm{sh}1$； $\frac{\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{1}}{2}$； $-\mathrm{ie}$； $\mathrm{e}^{-2k\pi}(\cos\ln 3+\mathrm{i}\sin\ln 3)$； $\mathrm{e}^{-\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi}\left(\cos\frac{\ln 2}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\ln 2}{2}\right)$.

17． k 为任意整数.

(1) $\ln 4+\mathrm{i}\pi(1+2k)$；

(2) i；

(3) $-\mathrm{i}\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)+2k\pi$；

(4) $\mathrm{i}\pi k$；

(5) $\ln 2+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$.

第3章

1．(1) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\mathrm{i}$；

(2) $-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\mathrm{i}$；

(3) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\mathrm{i}$.

2．(1) $-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i}$；

(2) $-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i}$；

(3) $-\frac{1}{6}+\frac{13}{6}\mathrm{i}$.

3． $\pi\mathrm{i}$

4．不一定成立，例如， $f(z)=z,|z|=1$，则

$$\oint_C \mathrm{Re}\left[f(z)\right]\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}，\quad \oint_C \mathrm{Im}\left[f(z)\right]\mathrm{d}z = -\pi$$

5．$8\pi\mathrm{i}$

6．略

7．(1) $2\mathrm{e}\pi^2\mathrm{i}$；　(2) $\frac{\pi}{a}\mathrm{i}$；　(3) $\frac{\pi}{\mathrm{e}}$；

(4) 0；　(5) 0；　(6) 0；

(7) $\frac{\pi}{12}$；　(8) 0（当 $|a|>1$ 时）；$\pi\mathrm{e}^a\mathrm{i}$（当 $|a|<1$ 时）；

(9) $2\pi\mathrm{i}$；　(10) $(-1+\mathrm{i})\pi$.

8．令 $F(z)=f_1(z)-f_2(z)$，在 $\overline{D}$ 上用柯西积分公式.

10．$2\pi\mathrm{i}$

13．(1) z^2；

(2) $z\mathrm{e}^z$；

(3) $(1-\mathrm{i})z^3$；

(4) $\frac{1}{2}-\frac{1}{z}$；

(5) $\ln z + c$（c 为实常数）.

第 4 章

1．(1)发散；

(2)收敛，极限为 -1；

(3)收敛，极限为 0；

(4)收敛，极限为 0.

2．(1) $R=2$；

(2) $R=\infty$；

(3) $R=\mathrm{e}$；

(4) $R=2$；

(5) $R=\infty$；

(6) $R=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

7．(1) $1-z^3+z^6-z^9+\cdots\quad(R=1)$；

(2) $1-2z^2+3z^4-4z^6+\cdots\quad(R=1)$；

(3) $1-\frac{z^4}{2!}+\frac{z^8}{4!}-\cdots\quad(R=\infty)$；

(4) $z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\cdots\quad(R=\infty)$；

(5) $\sin 1+(\cos 1)z+(\cos 1-\frac{1}{2}\sin 1)z^2+(\frac{5}{6}\cos 1-\sin 1)z^3+\cdots\quad(R=1)$；

(6) $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}\qquad(R=\infty)$;

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{n!}\qquad(R=\infty)$;

(8) $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}\quad(R=1)$.

8．(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(z-1)^n}{2^n}\qquad(R=2)$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}(z-1)^n\right]\qquad(R=2)$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n\quad(R=1)$;

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{(1-3\mathrm{i})^{n+1}}\left[z-(1+\mathrm{i})\right]^2\qquad\left(R=\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}(z-\pi)^{2n+1}\qquad(R=\infty)$;

(6) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)^n\qquad\left(R=\dfrac{\pi}{4}\right)$.

9．(1) $\cdots+\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{z^4}+\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{10}-\dfrac{z}{20}-\dfrac{z^2}{40}-\dfrac{z^3}{80}-\cdots$

(2) $\sum\limits_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n,\ \sum\limits_{n=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$;

(3) $-\sum\limits_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n,\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(z-2)^{n+2}}$;

(4) $1-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{3!}\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{4!}\dfrac{1}{z^4}+\cdots$;

(5) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}\dfrac{1}{(z-1)^{2n+1}}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n(z-\mathrm{i})^{n-2}}{\mathrm{i}^{n+1}},0<|z-\mathrm{i}|<1$， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n+1)\mathrm{i}^n}{(z-\mathrm{i})^{n+3}},1<|z-\mathrm{i}|<\infty$.

第 5 章

1. (1) z_0 是 $f(z)+g(z)$ 的 $\max\{m,n\}$ 级极点 $(m\neq n)$ 或者 m 级或低于 m 级极点 $(m=n)$；z_0 是 $f(z)g(z)$ 的 $(m+n)$ 级极点；z_0 是 $g(z)/f(z)$ 的可去奇点 $(m>n)$，z_0 是 $g(z)/f(z)$ 的 $(m-n)$ 级极点 $(m<n)$；

(2) z_0 是 $f(z)+g(z)$ 的 m 级零点 $(m<n)$，z_0 是 $f(z)+g(z)$ 的 m 级或高于 m 级零点 $(m=n)$；

(3) z_0 是 $f(z)+g(z)$，$f(z)g(z)$，$g(z)/f(z)$ 的本性奇点.

2. (1) $z=0, z=\pm1$ 均为一级极点；

(2) $z=0$ 为一级极点，$z=\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$ 为二级极点；

(3) $z=0$ 为二级极点；

(4) $z=k\pi-\dfrac{\pi}{4}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 均为一级极点；

(5) $z=\pm\mathrm{i}$ 为一级极点，$z=(2k+1)\pi\mathrm{i}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 均为一级极点；

(6) $z=1$ 为本性奇点；

(7) $z=0$ 为本性奇点；

(8) $z=0$ 为本性奇点；

(9) $z=0$ 是可去奇点，而其他奇点，如 $z=-1$ 不是孤立奇点；

(10) $z=k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 均为一级极点.

3. 10 级极点.

6. (1) $\mathrm{Res}[f(z),0]=0$；

(2) $\mathrm{Res}[f(z),0]=-\dfrac{1}{6}$；

(3) $\mathrm{Res}[f(z),0]=-\dfrac{1}{2}, \mathrm{Res}[f(z),2]=-\dfrac{3}{2}$；

(4) $\mathrm{Res}[f(z),0]=-\dfrac{4}{3}$；

(5) $\mathrm{Res}[f(z),k\pi]=(-1)^k, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

(6) $\mathrm{Res}\left[f(z),\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right]=-1, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

(7) $\mathrm{Res}[f(z),2]=0$；

(8) $\mathrm{Res}[f(z),0]=\begin{cases}0 & n\text{为奇数}\\ \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} & n\text{为偶数}\end{cases}$；

(9) $\text{Res}\left[f(z),1\right]=\dfrac{13}{6}$；

(10) $\text{Res}\left[f(z),1\right]=\dfrac{13}{6}$.

7．(1) $\dfrac{4}{5}\pi\text{i}$；

(2) $0,\text{Res}\left[f(z),0\right]=1,\text{Res}\left[f(z),1\right]=-\dfrac{1}{2},\text{Res}\left[f(z),-1\right]=-\dfrac{1}{2}$

(3) 0；

(4) $6\pi\text{i}$；

(5) $-\pi^2\text{i}$；

(6) $\dfrac{10}{3}\pi\text{i}$.

8．(1) $\text{Res}\left[f(z),\infty\right]=1$；

(2) $\text{Res}\left[f(z),\infty\right]=0$；

(3) $\text{Res}\left[f(z),\infty\right]=-\text{sh}1$；

(4) $\text{Res}\left[f(z),\infty\right]=0$；

(5) $\text{Res}\left[f(z),\infty\right]=-1$；

(6) $\text{Res}\left[f(z),\infty\right]=0$.

9．(1) πi；

(2) $2\pi\text{i}$；

(3) $2n\pi\text{i}$；

(4) $2\pi\text{i}\ (n=1)$， $0\ (n>1)$.

10．(1) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$；

(2) $\dfrac{\pi}{2}$；

(3) $\dfrac{\pi}{2a}$；

(4) $-\dfrac{\pi}{5}$；

(5) $\dfrac{\pi}{2e}$；

(6) $0,(m=2k);(-1)^k\frac{\pi}{3}\frac{1}{2^{2k}},(m=2k+1),k=0,1,2,\cdots$；

(7) $\frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}$；

(8) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$；

(9) $\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1-3\sin 1)$；

(10) π.

第6章

1．(1)旋转角 $\operatorname{Arg} f'(\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}$，伸缩率 $|f'(\mathrm{i})|=6$；

(2)旋转角 $\operatorname{Arg} f'(\mathrm{i})=\frac{\pi}{3}$，伸缩率 $|f'(\mathrm{i})|=2$；

(3)旋转角 $\operatorname{Arg} f'(\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}$，伸缩率 $|f'(\mathrm{i})|=1$.

2．(1)映射成以 $w_1=-1,w_2=-\mathrm{i},w_3=\mathrm{i}$ 为顶点的三角形;

(2)映射成以闭圆域：$|w-\mathrm{i}|\leqslant 1$.

3．(1) Z 平面上 $|z+1|>\frac{1}{2}$ 部分被放大了，在 $|z+1|<\frac{1}{2}$ 部分被缩小了;

(2) Z 平面上 $\operatorname{Re} z=x>-1$ 部分被放大了，在 $\operatorname{Re} z=x<-1$ 部分被缩小了.

4．映射成 W 平面上虚轴正向.

5．(1)在 $z\neq 0$ 处映射具有旋转角和伸缩率的不变性;

(2)在 $z\neq\pm\mathrm{i}$ 处映射具有旋转角和伸缩率的不变性.

8．(1)圆周 $u^2+v^2=\frac{1}{4}$；

(2)直线 $v=0$；

(3)直线 $v=-\frac{1}{2}$；

(4)直线 $v=-u$；

(5) $u=\frac{1}{2}$；

(6)圆周 $(u-\frac{1}{2})^2+v^2=\frac{1}{4}$.

9．(1) $w = \mathrm{i}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$；

(2) $w = \dfrac{3z+(\sqrt{5}-2\mathrm{i})}{(\sqrt{5}-2\mathrm{i})z+3}$.

10．(1) $w = \dfrac{2z-1}{2-z}$；

(2) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

11．(1) $\operatorname{Im} w > 1$；

(2) $\operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w$；

(3) $|w+\mathrm{i}| > 1\ (\operatorname{Im} w < 0)$；

(4) $\left|w-\dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}\ (\operatorname{Im} w < 0)$.

12．(1) $w = \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}-(1+2\mathrm{i})z}$；

(2) $w = -\mathrm{i}\dfrac{z-1}{z+1}$；

(3) $w = \dfrac{(2+\mathrm{i})+\mathrm{i}z}{z+1}$.

13．(1) $w = \dfrac{2}{2-z}$；

(2) $w = \dfrac{-4z-2}{z-2}$.

14．(1)映射成：$(u-\dfrac{1}{2})^2+v^2 > \dfrac{1}{4}, u>0, v>0$；

(2)映射成：$u>0, v>0$.

15．(1)映射成：$\rho<1, 0<\varphi<\pi$；

(2)映射成：$u>0, 0<v<\pi$.

16．(1)映射成：$|w|<1$；

(2)映射成：$|w|<1$.

17．(1) $w = -\left[\dfrac{z+(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{z-(\sqrt{3}+\mathrm{i})}\right]^3$；

(2) $w = \left(\dfrac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2$；

(3) $w=\left(\dfrac{z^{\frac{1}{2}}+1}{z^{\frac{1}{2}}-1}\right)^2$；

(4) $w=-\left[\dfrac{2z+(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{2z-(\sqrt{3}+\mathrm{i})}\right]^3$；

(5) $\sqrt{1-\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^2}$；

(6) $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{z}{z-2}}$.

18．(1)沿实轴上的射线 $(-\infty,-1]$ 与 $[1,+\infty)$ 剪开的整个平面；

(2)下半平面；

(3)沿以 ±1 为端点，在点1与实轴夹角为 2α 的圆弧剪开的整个平面.

第 7 章

3．(1) $F(\omega)=\dfrac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$；　(2) $F(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4+4}$；　(3) $F(\omega)=\dfrac{-2\mathrm{j}\sin\omega\pi}{1-\omega^2}$

(4) $-\dfrac{2A\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega T$；　(5) $\dfrac{\sin\omega T}{\omega}+\dfrac{T^2\omega\sin\omega T}{\pi^2-T^2\omega}$；

(6) $-\dfrac{2(1+\mathrm{j}\omega)}{(1+\mathrm{j}\omega)^2+1^2}\sin\omega T$；　(7) $\begin{cases}-\pi, & |\omega|<\dfrac{a}{2\pi},\\ 0, & 其他.\end{cases}$

4．$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}[u(1+t)+u(1-t)-1], & |t|\neq1\\ \dfrac{1}{4}, & |t|=1\end{cases}$.

5．$F(\omega)=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{j}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]$.

6．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)]+\dfrac{\mathrm{j}\pi}{2}[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)]$.

7．$F(\omega)=\dfrac{4A}{\tau\omega^2}\left(1-\cos\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$.

8．(1) $f(t)=\dfrac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\dfrac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^2}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega$；

(2) $f(t)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\dfrac{(5-\omega^2)\cos\omega t+2\omega\sin\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}\mathrm{d}\omega$；

(3) $f(t)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\dfrac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega t\mathrm{d}\omega.$

9．$F(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n\pi}, & (n=2,4,6,\cdots),\\ \dfrac{\sqrt{4+n^2\pi^2}}{n^2\pi^2}, & (n=1,3,5,\cdots);\end{cases}\qquad \varphi(n)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & (n=2,4,6,\cdots),\\ arctg\dfrac{n\pi}{2}, & (n=1,3,5,\cdots).\end{cases}$

10．(1) $\mathrm{j}\dfrac{d}{d\omega}\left[\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{b}{a}\omega}\right]$；　(2) $\mathrm{j}\omega\left[\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{b}{a}\omega}\right]$；

(3) $\mathrm{j}\dfrac{a}{|a|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{b\omega}{a}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{b}{a}\omega}\right]-\mathrm{b}\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{b\omega}{a}}$；

(4) $\dfrac{1}{\mathrm{j}2\omega}F\left(\dfrac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$；　(5) $\dfrac{1}{2}F(\omega+\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 b}+\dfrac{1}{2}F(\omega-\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 b}$.

第8章

1．(1) $F(s)=\dfrac{1}{s}(3-4\mathrm{e}^{-2s}+\mathrm{e}^{-4s})$；　(2) $F(s)=\dfrac{3}{s}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi s}{2}})-\dfrac{1}{s^2+1}\mathrm{e}^{-\frac{\pi s}{2}}$；

(3) $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+1}$；　(4) $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{(s-1)^2}$；　(5) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$；

(6) $F(s)=\dfrac{10-3s}{s^2+4}$；　(7) $F(s)=\dfrac{s+4}{(s+4)^2+16}$；　(8) $F(s)=\dfrac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}s}$；

(9) $F(s)=\dfrac{2}{s(s^2+4)}$；(10) $F(s)=\sqrt{\dfrac{\pi}{s-3}}$.

2．(1) $F(s)=\dfrac{2}{4s^2+1}$；　(2) $F(s)=\dfrac{2}{s^3}$；　(3) $F(s)=\dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}$；

(4) $F(s)=\dfrac{2}{s(s^2+4)}$；　(5) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$；　(6) $F(s)=\dfrac{1}{s+2}$；

(7) $F(s)=\dfrac{1}{s-2}+5$；　(8) $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+1}$.

3．$\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{(1-\mathrm{e}^{-\pi s})(s^2+1)}$.

4．(1) $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s^2}\cdot\dfrac{1-\mathrm{e}^{-bs}}{1+\mathrm{e}^{bs}}$；　(2) $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{1+s^2}\cdot\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\pi s}}{1+\mathrm{e}^{\pi s}}$；

(3) $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s(1+\mathrm{e}^{-as})}\cdot\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2as}}{1+\mathrm{e}^{2as}}$；　(4) $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1-\mathrm{e}^{-bs}}{1+\mathrm{e}^{bs}}$.

5．(1) $F(s)=\frac{2}{s^3}(2s^2+3s+2)$；　(2) $F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}$；

(3) $F(s)=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$；　(4) $F(s)=\frac{6}{(s+2)^2+36}$；

(2) $F(s)=\frac{10-3s}{s^2+4}$；　(6) $F(s)=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$；(n 为正整数)

(7) $F(s)=\frac{1}{s}e^{-\frac{5}{3}t}$；　(8) $F(s)=\frac{1}{s}$.

6．(1) $f(t)=\frac{1}{2}\sin 2t$；(2) $f(t)=\frac{1}{6}t^3$；(3) $f(t)=\frac{1}{6}t^3e^{-t}$；(4) $f(t)=e^{-3t}$；

(5) $f(t)=2\cos 3t+\sin 3t$；(6) $f(t)=e^{-3t}$；(7) $f(t)=\frac{1}{5}(3e^{2t}+2e^{-3t})$；

(8) $f(t)=2e^{-3t}\cos 3t+\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$；(9) $f(t)=2te^t+2e^t-1$；

(10) $f(t)=\frac{3}{2a}\sin at-\frac{1}{2}t\cos at$；(11) $f(t)=\frac{1}{2a^3}(\sin at-\cos at)$；

(12) $f(t)=\frac{c-a}{(b-a)^2}e^{at}+\left[\frac{c-b}{a-b}t+\frac{a-c}{(a-b)^2}\right]e^{-bt}$.

(13) $f(t)=\delta(t)-2e^{-2t}$；　(14) $f(t)=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$；

(15) $f(t)=\frac{2-e^t-e^{-t}}{t}$；　(16) $f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t-t\cos t)$；

(17) $f(t)=5\sin 2t-\cos 2t$.

7．(1) $y(t)=\frac{1}{4}[(7+2t)e^{-t}-3e^{-3t}]$；

(2) $y(t)=e^{-t}-e^{-2t}+[-e^{-(t-1)}+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}+\frac{1}{2}]u(t-1)$；

(3) $y(t)=-2\sin t-\cos 2t$；　(4) $y(t)=te^t\sin t$；

(5) $y(t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}e^{2t}-\frac{1}{5}\sin t$；　(6) $y(t)=\frac{1}{2}t\sin t$.

8．$F(s)=\frac{2(3s^2+12s+13)}{s^2[(s+3)^2+4]^2}$.

9．$f(t)=a\left(t+\frac{t^3}{6}\right)$.

10．解：设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，对方程两边同取拉氏变换．并考虑到初始条件，得到

$$s^2Y(s)-1+2sY(s)-3Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

整理得

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}$$

根据海维赛展开式来求其逆变换．这里 $B(s)$有三个单零点： $p_1=-1, p_2=1, p_3=-3$．故

$$y(t)=\frac{s+2}{3s^2+6s-1}\mathrm{e}^{st}\bigg|_{s=-1}+\frac{s+2}{3s^2+6s-1}\mathrm{e}^{st}\bigg|_{s=1}+\frac{s+2}{3s^2+6s-1}\mathrm{e}^{st}\bigg|_{s=-3}$$

$$=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{8}\mathrm{e}^{t}-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3t}=\frac{1}{8}(3\mathrm{e}^{t}-2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t})$$

即为所求微分方程的解．

11． $x(t)=\frac{k}{m}t$．

参 考 文 献

[1] 西安交通大学高等数学教研室. 复变函数. 北京：高等教育出版社，1996.

[2] 钟玉泉. 复变函数论. 2 版. 北京：高等教育出版社出版，2001.

[3] 祝同江，等. 复变函数论. 2 版. 北京：电子工业出版社，2000.

[4] 哈尔滨工业大学数学系. 复变函数与积分变换. 北京：科学出版社，2001.

[5] 严镇军. 复变函数. 合肥：中国科学技术大学出版社，2001.

[6] 余家荣. 复变函数. 4 版. 北京：高等教育出版社，2001.

[7] 宋叔尼. 复变函数与积分变换. 北京：科学出版社，2006.

[8] 刁元胜. 积分变换. 广州：华南理工大学出版社，1995.